

Formulario Meccanica

Mario Cirillo, cirillo.1646892@studenti.uniroma1.it
Federico Radiconi, radiconi.1667846@studenti.uniroma1.it
Federico Silvetti, silvetti.1591304@studenti.uniroma1.it

11 Marzo 2019

1 Vettori

Un vettore $\vec{v}$ è caratterizzato da modulo, direzione e verso:

$$\vec{v} = v \hat{v} \quad (1)$$

$v = |\vec{v}|$ è il modulo del vettore $\vec{v}$ mentre $\hat{v}$ è il suo versore, un vettore che condivide direzione e verso di $\vec{v}$ e ha modulo 1.

Dato un sistema di riferimento (xy), un vettore $\vec{v}$ può essere scomposto lungo gli assi e si può scrivere

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

con $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i versori degli assi x e y .

Le componenti v_x e v_y del vettore si possono scrivere come

$$\begin{cases} v_x = v \cos \alpha \\ v_y = v \sin \alpha \end{cases} \quad (3)$$

dove α è l'angolo formato dal vettore $\vec{v}$ con l'asse x .

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (5)$$

che rappresentano rispettivamente il modulo e la direzione di $\vec{v}$.

Chiaramente conoscere le componenti di un vettore è equivalente a conoscere il suo modulo insieme ad α e viceversa.

2 Cinematica del punto

Riassumiamo i punti principali della cinematica del punto in due dimensioni.

2.1 Definizioni

Posizione: il vettore posizione $\vec{x}$ contiene le coordinate necessarie a identificare un punto nel piano rispetto a un dato sistema di riferimento. Esplicitamente si indica:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6)$$

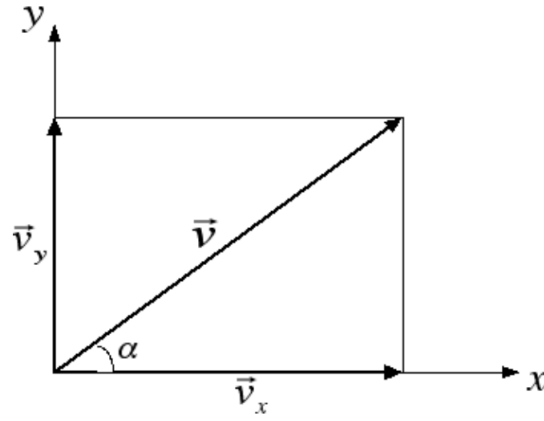


Figure 1: Componenti di $\vec{v}$.

Risolvere il moto di un sistema fisico significa conoscerne le leggi orarie, ovvero la dipendenza della posizione dal tempo:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Velocità: il vettore velocità $\vec{v}$ quantifica lo spostamento di un sistema fisico nel piano.

La velocità istantanea è definita come la derivata rispetto al tempo della posizione:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \end{pmatrix} \quad (8)$$

Accelerazione: il vettore accelerazione $\vec{a}$ quantifica la variazione della velocità di un sistema fisico rispetto a un dato sistema di riferimento.

L'accelerazione istantanea è definita come la derivata rispetto al tempo della velocità, quindi come la derivata seconda rispetto al tempo della posizione:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} d^2x(t)/dt^2 \\ d^2y(t)/dt^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

2.2 Configurazioni elementari del moto

Dato un sistema di riferimento inerziale, consideriamo ora le configurazioni più comuni del moto di una particella nello spazio.

Un sistema di riferimento è inerziale se è fermo o si muove a velocità costante rispetto alle stelle fisse.

2.2.1 Assenza di moto

Per accelerazione e velocità nulle, la posizione del punto rimane costante nel tempo:

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \vec{0} \\ \vec{v}(t) = \vec{0} \\ \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (10)$$

dove t_0 è un dato istante di riferimento e $\vec{x}_0$ la posizione del sistema in quell'istante.

2.2.2 Moto rettilineo uniforme

Un corpo con accelerazione nulla, ma velocità diversa da zero e costante, continua a spostarsi lungo la direzione definita dal vettore velocità al passare del tempo:

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \vec{0} \\ \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) \end{cases} \quad (11)$$

dove t_0 è l'istante iniziale del moto e $\vec{v}_0$ e $\vec{x}_0$ sono rispettivamente il vettore velocità e il vettore posizione all'istante t_0 .

2.2.3 Moto uniformemente accelerato

Un corpo con accelerazione costante $\vec{a}$ varia ad ogni istante la sua velocità e la sua posizione secondo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \\ \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad (12)$$

dove t_0 è l'istante iniziale del moto e $\vec{v}_0$ e $\vec{x}_0$ sono rispettivamente il vettore velocità e il vettore posizione all'istante t_0 . Eliminando il fattore temporale dalle ultime due equazioni, si ottiene una formula molto utile che lega la variazione di velocità allo spostamento e all'accelerazione. Per l'asse x si ha:

$$v_x^2(t) = v_{0,x}^2 + 2a_x(x(t) - x_0) \quad (13)$$

dove a_x è la componente x dell'accelerazione.

2.3 Moti piani

2.3.1 Moto di un proiettile

Questo tipo di moto può essere scomposto in due componenti: un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y , con accelerazioni rispettivamente $a_x = 0$ e $a_y = -g$, dove $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità. In Figura 2 è mostrato il moto del proiettile nel caso in cui questo sia lanciato con velocità iniziale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale.

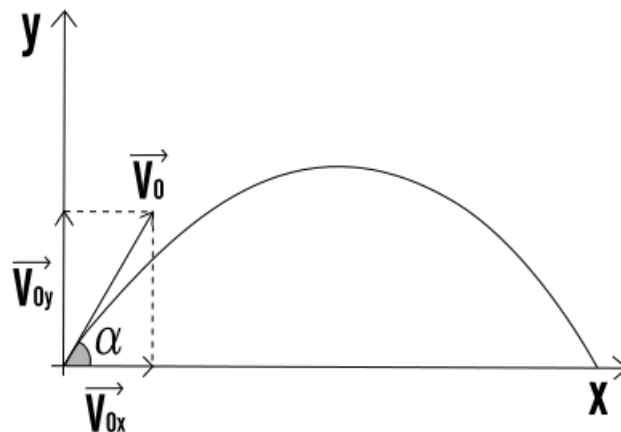


Figure 2: Classico esempio di moto parabolico.

Le componenti della velocità iniziale sono:

$$\begin{cases} v_{0,x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0,y} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (14)$$

dove v_0 è il modulo del vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$. Di conseguenza, indicate con $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$ le posizioni iniziali del proiettile lungo gli assi, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos \alpha (t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin \alpha (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \end{cases} \quad (15)$$

Al punto di massimo max si ha

$$t_{max} = t_0 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (16)$$

$$v_{max,x} = v_0 \cos \alpha \quad (17)$$

$$v_{max,y} = 0 \quad (18)$$

$$x_{max} = x_0 + \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \quad (19)$$

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (20)$$

Al punto di caduta f si ha

$$t_{volo} = t_0 + \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (21)$$

$$v_{f,x} = v_0 \cos \alpha \quad (22)$$

$$v_{f,y} = v_0 \sin \alpha - g t_{volo} \quad (23)$$

$$x_f = G = x_0 + \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \quad (24)$$

$$y_f = y_0 \quad (25)$$

dove con G si è indicata la gittata.

La traiettoria è una parabola:

$$y(x) = y_0 + \tan \alpha (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} (x - x_0)^2 \quad (26)$$

2.3.2 Moto circolare uniforme

È un moto con traiettoria circolare caratterizzato da raggio $R = costante$ e dal modulo della velocità $v = costante$.

Si definisce il periodo T come il tempo necessario per fare un giro completo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad (27)$$

La velocità angolare ω di rotazione è definita come la variazione dell'angolo percorso nell'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo:

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} \quad (28)$$

Si definisce frequenza f il numero di giri fatti in un secondo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R} \quad (29)$$

L'accelerazione nel moto circolare è diretta sempre verso il centro della circonferenza e per questo è detta centripeta. Il suo modulo a_c è:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (30)$$

Si possono introdurre delle relazioni che legano le grandezze lineari (distanza percorsa e velocità) a quelle angolari (angolo e velocità angolare):

$$\Delta s = R\Delta\theta \quad (31)$$

$$v = R\omega \quad (32)$$

dove s è la coordinata curvilinea sulla circonferenza e quindi Δs è lo spazio percorso sulla circonferenza associato ad una certa variazione dell'angolo.

2.3.3 Moto armonico

Il moto armonico è il moto di un oggetto di massa m attaccato a una molla di costante elastica k . L'accelerazione a cui è sottoposta la massa m si oppone al suo spostamento secondo l'equazione

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (33)$$

in cui il parametro ω definisce la pulsazione del moto e ha dimensione $[t]^{-1}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (34)$$

La soluzione del moto è nella forma

$$x(t) = A \cos [\omega(t - t_0) + \phi] \quad (35)$$

$$v(t) = -\omega A \sin [\omega(t - t_0) + \phi] \quad (36)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos [\omega(t - t_0) + \phi] = -\omega^2 x(t) \quad (37)$$

Le due costanti A (ampiezza) e ϕ (fase iniziale) vengono fissate dalle condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 = A \cos \phi \quad (38)$$

$$v(t_0) = v_0 = -\omega A \sin \phi \quad (39)$$

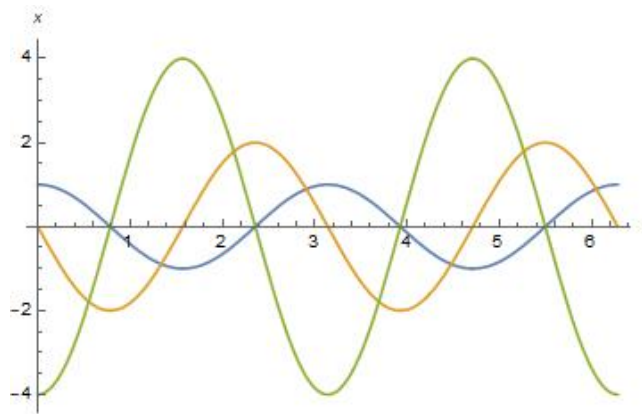


Figure 3: Grafico del moto armonico con $A = 1$, $\omega = 2$, $\phi = 0$. In arancione è riportata la posizione, in blu la velocità e in verde l'accelerazione.

È facile osservare dal grafico che il moto è periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (40)$$

Casi particolari:

$$\begin{aligned}
 x_0 = x_{max} = A, v_0 = 0 &\implies \phi = 0 \\
 x_0 = x_{min} = -A, v_0 = 0 &\implies \phi = \pi \\
 x_0 = 0, v_0 = v_{max} = \omega A &\implies \phi = \frac{3}{2}\pi \\
 x_0 = 0, v_0 = v_{min} = -\omega A &\implies \phi = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
 x = x_{max} = A &\implies v = 0, a = a_{min} = -\omega^2 A, U_{el} = U_{el,max} = \frac{1}{2}kA^2, K = 0 \\
 x = x_{min} = -A &\implies v = 0, a = a_{max} = \omega^2 A, U_{el} = U_{el,max} = \frac{1}{2}kA^2, K = 0 \\
 x = 0 &\implies v = v_{max} = \omega A, a = 0, U_{el} = 0, K = K_{max} = \frac{1}{2}mv^2 \\
 x = 0 &\implies v = v_{min} = -\omega A, a = 0, U_{el} = 0, K = K_{max} = \frac{1}{2}mv^2
 \end{aligned}$$

dove con U_{el} e K si sono indicate rispettivamente l'energia potenziale elastica e l'energia cinetica. Quindi:

- Nel punto di massimo allungamento ($x = x_{max}$) o di massima compressione ($x = x_{min}$) della molla, l'energia potenziale elastica è massima e l'energia cinetica è nulla;
- Nel punto di equilibrio della molla ($x = 0$), l'energia potenziale elastica è nulla e l'energia cinetica è massima.

2.3.4 Pendolo

Se le oscillazioni del pendolo sono piccole, si osserva che il moto è armonico e il periodo dell'oscillazione non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione né dalla massa attaccata:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (41)$$

dove l è la lunghezza del filo e g è l'accelerazione di gravità.

2.4 Moti relativi

Siano due sistemi di riferimento (xy) e $(x'y')$ in cui il secondo è in moto rispetto al primo con velocità $\vec{u}$ come mostrato in Figura 4. In una situazione del genere un corpo in moto avrà velocità $\vec{v}$ nel sistema (xy) e $\vec{v}'$ nel sistema $(x'y')$. Le due velocità sono legate dalla seguente relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (42)$$

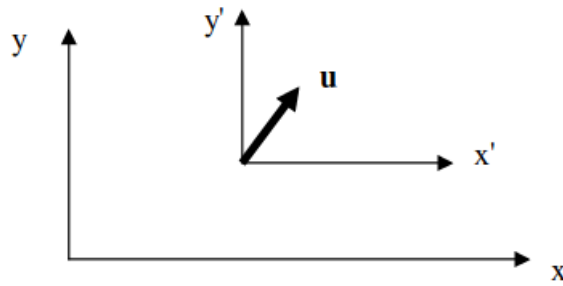


Figure 4: Moti relativi.

3 Dinamica del punto

3.1 Leggi di Newton

- Prima legge di Newton (principio di inerzia): dato un sistema di riferimento inerziale, un corpo su cui non agiscono forze o la cui risultante è nulla mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
- Seconda legge di Newton: un corpo di massa m e soggetto ad una forza totale $\vec{F}_{tot}$ subirà un'accelerazione $\vec{a}$ data da:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{tot}}{m} \quad (43)$$

quindi il vettore accelerazione punta nello stesso verso della forza totale.

L'unità di misura della forza nel SI è il Newton (N): $1 \text{ N} = 1 \text{ kg } 1 \text{ m/s}^2$.

Condizione di equilibrio di un sistema:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{0} \quad (44)$$

- Terza legge di Newton (principio di azione e reazione): per ogni forza che un corpo A esercita su un corpo B, ne esiste un'altra con stesso modulo e direzione ma verso opposto che B esercita su A. Quindi matematicamente si può affermare:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad (45)$$

3.2 Forze

- Forza peso:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (46)$$

Nel caso terrestre $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. La forza peso punta sempre verticalmente verso il basso.

- Forza centripeta per il moto circolare:

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \quad (47)$$

È sempre diretta verso il centro della circonferenza.

- Forza normale o reazione vincolare: $\vec{N}$. È esercitata da una superficie su un corpo che preme su di essa ed è sempre ortogonale alla superficie.
- Forze di attrito. Agiscono tra un corpo e la superficie con cui è a contatto e si dividono in:

- Forza di attrito statico:

$$\vec{f}_s \leq \mu_s \vec{N} \quad (48)$$

Punta nel verso opposto a quello verso cui il corpo si muoverebbe senza l'attrito statico. Nell'istante in cui il corpo comincia a muoversi, si ha la forza d'attrito statico massima:

$$\vec{f}_{s,max} = \mu_s \vec{N} \quad (49)$$

- Forza di attrito dinamico:

$$\vec{f}_d = \mu_d \vec{N} \quad (50)$$

La forza d'attrito dinamico si oppone sempre al verso del moto.

μ_s e μ_d sono rispettivamente i coefficienti d'attrito statico e dinamico. Sono quantità adimensionali comprese tra 0 e 1 e si ha sempre $\mu_s \geq \mu_d$.

- Forza di tensione: $\vec{T}$. Si ha quando una corda o un cavo esercitano una trazione su un corpo. La sua direzione è sempre parallela alla corda o al cavo.
- Forza gravitazionale di modulo:

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (51)$$

È diretta sempre lungo la congiungente i due corpi di massa m_1 e m_2 e distanti r . G è la costante di gravitazione universale e ha valore $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

- Forza elastica:

$$\vec{F}_{el} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (52)$$

È esercitata da una molla avente costante elastica k ed è parallela e sempre opposta allo spostamento. $\vec{x}_0$ rappresenta la posizione a riposo della molla.

4 Lavoro ed energia

4.1 Lavoro

Data una forza $\vec{F}$ costante che fa compiere a un oggetto uno spostamento $\vec{s}$, il lavoro L fatto dalla forza è definito come

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta \quad (53)$$

dove θ è l'angolo tra la forza e lo spostamento.

Nel SI il lavoro si misura in joule (J), dove 1 J è il lavoro compiuto da una forza di 1 N quando il suo punto di applicazione si sposta di 1 m.

Casi particolari:

$$\text{Se } \vec{F} \text{ e } \vec{s} \text{ sono paralleli} \implies \theta = 0 \implies L = Fs$$

$$\text{Se } \vec{F} \text{ e } \vec{s} \text{ sono ortogonali} \implies \theta = \frac{\pi}{2} \implies L = 0$$

Se la forza $\vec{F}$ non è costante, ma dipende dalla posizione, il lavoro fatto dalla forza per uno spostamento $\vec{s} = \vec{s}_f - \vec{s}_i$ è

$$L = \int_{s_i}^{s_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (54)$$

Lavori più comuni:

- Lavoro forza elastica: il lavoro fatto dalla forza elastica $\vec{F} = -k\vec{x}$ per uno spostamento da x_i a x_f è

$$L_{el} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \quad (55)$$

Il lavoro della forza elastica è sempre negativo perché la forza elastica si oppone sempre allo spostamento.

- Lavoro forza peso: il lavoro fatto dalla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ per uno spostamento da y_i a y_f è

$$L_p = -mg(y_f - y_i) \quad (56)$$

Notare che se l'oggetto sale il lavoro è negativo, altrimenti è positivo.

- Lavoro forza d'attrito: il lavoro fatto dalla forza d'attrito $\vec{f} = \mu\vec{N}$ per andare da x_i a x_f è

$$L_{att} = -f(x_f - x_i) \quad (57)$$

Il lavoro della forza d'attrito è sempre negativo perché la forza d'attrito si oppone sempre allo spostamento.

4.2 Energia potenziale

Se la forza è conservativa, allora il lavoro che essa fa nello spostamento da un punto A ad un punto B non dipende dal particolare percorso seguito ma solamente dagli estremi A e B. In tal caso è possibile definire una funzione energia potenziale $U(x, y, z)$ tale che il lavoro fatto per andare da A a B sarà:

$$L_{A \rightarrow B} = U_A - U_B = -\Delta U \quad (58)$$

È evidente inoltre che, nel caso di forze conservative, il lavoro compiuto lungo una traiettoria chiusa sia nullo.

Esempi di forze conservative sono la forza elastica, la forza peso e la forza gravitazionale. La forza d'attrito è una forza non conservativa.

L'energia potenziale è definita a meno di una costante e si misura in J. La costante si fissa stabilendo arbitrariamente una posizione in cui l'energia potenziale abbia un valore noto (solitamente si pone zero).

Energie potenziali più comuni:

- Energia potenziale elastica per una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo x_0 :

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \text{cost},$$

$$\text{la molla a riposo non ha energia dunque } U(x_0) = 0 \implies \text{cost} = 0.$$

- Energia potenziale della forza peso per un oggetto di massa m che si trova ad altezza h dal suolo:

$$U(h) = mgh + \text{cost},$$

$$\text{al suolo non c'è energia potenziale } U(0) = 0 \implies \text{cost} = 0.$$

- Energia potenziale gravitazionale per due corpi di massa m_1 e m_2 distanti r uno dall'altro:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \text{cost},$$

$$\text{a distanza infinita l'interazione è nulla } U(\infty) = 0 \implies \text{cost} = 0.$$

4.3 Potenza

La potenza media P_m di un sistema fisico è uguale al rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e l'intervallo di tempo necessario per eseguire tale lavoro:

$$P_m = \frac{L}{\Delta t} \quad (59)$$

La potenza si misura in watt (W) nel SI: 1 W è la potenza di un sistema fisico che compie un lavoro di 1 J in 1 s.

La potenza istantanea P è definita come il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ della potenza media:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (60)$$

4.4 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

Definiamo l'energia cinetica K di un corpo di massa m che si muove a velocità v come

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (61)$$

L'energia cinetica si misura in J.

Il teorema dell'energia cinetica o teorema delle forze vive afferma che il lavoro L compiuto su un corpo da una forza esterna che fa muovere il corpo dal punto iniziale i al punto finale f è pari alla differenza di energia cinetica tra il punto finale K_f e il punto iniziale K_i :

$$L = \Delta K = K_f - K_i \quad (62)$$

Questo teorema vale sia per forze conservative sia per forze non conservative.

4.5 Energia meccanica e sua conservazione

Il teorema di conservazione dell'energia meccanica afferma che se un sistema è caratterizzato da sole forze conservative, allora l'energia meccanica $E = K + U$ si conserva durante il moto.

Dati due istanti di tempo t_1 e t_2 , l'energia meccanica si conserva:

$$E(\vec{x}(t_1)) = E(\vec{x}(t_2)) \quad (63)$$

Questo teorema può essere scritto anche come

$$E_i = E_f \iff \Delta E = 0 \quad (64)$$

In presenza di forze non conservative (ad esempio, l'attrito dinamico o la forza motrice esercitata da un motore esterno al sistema), l'energia del sistema non è conservata e la sua variazione è data proprio dal lavoro delle forze non conservative. Si ha dunque

$$E_f = E_i + L_{n.c.} \iff \Delta E = L_{n.c.} \quad (65)$$

ricordando che $L_{n.c.}$ deve essere preso negativo.

5 Quantità di moto e urti

5.1 Quantità di moto e impulso

Dato un corpo di massa m , è possibile definire un nuovo vettore $\vec{p}$ detto quantità di moto:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Possiamo riformulare il secondo principio della dinamica in termini di questo nuovo oggetto come

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (66)$$

Questa equazione prende il nome di prima equazione cardinale. Si vede facilmente che l'assenza di forze equivale a richiedere che $\vec{p}$ sia conservato. Le dimensioni di una quantità di moto sono $[p] = \frac{[m][l]}{[t]}$ ed essa si misura in $\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$.

Se si considera un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ e si integra la (66), è possibile definire un nuovo vettore $\vec{I}$ chiamato impulso:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \Delta \vec{p} \quad (67)$$

L'equazione qui sopra consiste nell'enunciato del teorema dell'impulso.

Se la forza $\vec{F}$ è costante nell'intervallo di tempo Δt , si può scrivere:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p} \quad (68)$$

da cui si ottiene

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (69)$$

che è la prima equazione cardinale in forma non locale.

5.2 Urti puntiformi

Considerando due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 , chiamiamo urto l'interazione di contatto che si stabilisce per un "breve"¹ lasso di tempo fra i due corpi. In questa interazione i due corpi scambiano energia cinetica e quantità di moto tramite una forza impulsiva (da intendersi come intensa ma concentrata nel tempo).

Per il terzo principio della dinamica, la forza che agisce su uno dei due corpi nell'urto sarà uguale e opposta a quella che agisce sull'altro. Segue dalla (67) che

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p}_1 &= \vec{I} \\ \Delta \vec{p}_2 &= -\vec{I}\end{aligned}$$

Sommando si vede che

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 &= 0 \\ \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} &= \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}\end{aligned}$$

dove si è indicato con i l'istante subito prima dell'urto e con f l'istante subito dopo. La quantità di moto totale del sistema si conserva.

In generale, l'energia meccanica totale delle due masse può variare durante l'urto. In tal caso si ha a che fare con un urto anelastico.

Esistono due tipi di urto:

- elastico. Si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \quad (70)$$

$$K_{1,i} + K_{2,i} = K_{1,f} + K_{2,f} \quad (71)$$

In questo caso è possibile risolvere l'urto trovando le velocità dei due corpi dopo l'urto:

$$\vec{v}_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_{1,i} + 2m_2\vec{v}_{2,i}}{m_1 + m_2} \quad (72)$$

$$\vec{v}_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_{2,i} + 2m_1\vec{v}_{1,i}}{m_1 + m_2} \quad (73)$$

- totalmente anelastico. Si conserva solo la quantità di moto:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_f \quad (74)$$

In questo caso i due corpi rimangono uniti dopo l'urto.

La velocità con cui i due corpi emergono dalla collisione è:

$$\vec{v}_{1,f} = \vec{v}_{2,f} = \vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}}{m_1 + m_2}. \quad (75)$$

In entrambi i casi si ricordi di prendere le velocità con i relativi segni.

¹Per breve si intende che la durata dell'urto ($\Delta t = t_f - t_i$) risulti molto più piccola della scala di tempo del moto dei due corpi.