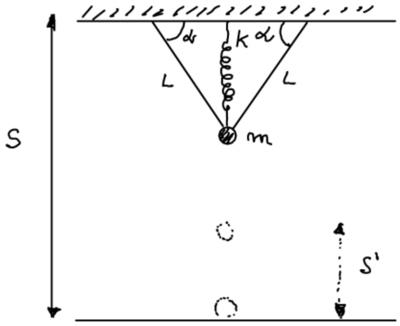
Esame scritto del corso di Fisica per Scienze biologiche

Proff. M.G. Betti, M. De Luca, F. Frasca, L. Graziani, R. Maoli – 20 febbraio 2023

Esercizio 1

Una pallina di massa m = 300 gr si trova appesa ad un soffitto di altezza S = 3.00 m tramite due corde ideali di massa trascurabile e una molla. La lunghezza delle due corde è L = 30.0 cm e la molla ha una costante elastica k = 10.0 N/m e lunghezza a riposo di 30.0 cm. All'equilibrio le due corde sono inclinate rispetto all'orizzontale di un angolo α= 30.0° come in figura.

a) Quali sono le forze agenti sulla pallina nella condizione di equilibrio? Se ne stabilisca modulo, direzione e verso.



A un dato istante le due corde si rompono simultaneamente e, dopo un certo intervallo di tempo, la pallina trova, per effetto di dissipazioni che interrompono l'oscillazione, una nuova configurazione di equilibrio. Si calcoli:

b) l'energia totale della pallina al momento della rottura;
c) l'altezza della pallina nel nuovo punto di equilibrio.

Si immagini ora che, dopo un certo istante dalla nuova configurazione di equilibrio, la molla si rompa a sua volta e la pallina sia libera di cadere a terra e rimbalzare con un urto anelastico che ne dimezza l'energia cinetica. Calcolare:

d) Si calcoli la nuova quota S' raggiunta dalla pallina dopo il rimbalzo.

Esercizio 2

All'interno di un cilindro ideale, un gas perfetto monoatomico (n = 2.00 moli) passa dallo stato iniziale A a quello finale D compiendo tre trasformazioni reversibili:

1. isocora con aumento di pressione (AB),
2. isoterma (BC),
3. isobara (CD).

Le condizioni note sono: $p_A = 5.00\cdot10^3$ Pa, $V_A = 1.00$ m^3, $p_C = p_D = p_A$, $V_C = 2V_A$, $V_D = 2V_C$.

a) Si rappresenti su un diagramma p-V la trasformazione ABCD.
b) Si calcoli il lavoro compiuto dal gas e la variazione di energia interna per ciascuna trasformazione.

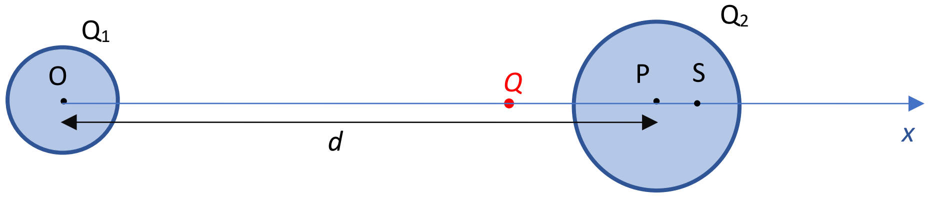
Alla fine della trasformazione ABCD, ossia nello stato D, viene bloccato il pistone che chiude il cilindro e introdotta al suo interno una sfera di ferro (c_{Fe} = 450 J kg^{-1} K^{-1}) di massa m = 150 g e di volume trascurabile. Una volta raggiunto l'equilibrio la temperatura finale del sistema è T_f = 750 K.

c) Si calcoli la temperatura iniziale della sfera di ferro.

Esercizio 3

Due gusci sferici di materiale dielettrico, aventi carica Q_1= - 2.00 nC e Q_2= + 4.00 nC, rispettivamente, hanno centro in O e in P come in figura. Le sfere hanno raggi pari a R_1= 20.0 cm e R_2= 2R_1, e la distanza tra i loro centri è pari a d = 200 cm.

a) Calcolare modulo, direzione e verso del campo elettrico totale nel punto Q di coordinate $(\frac{3}{4}d, 0)$ e nel punto S a distanza r = 20.0 cm da P, alla sua destra (vedere figura).
b) Calcolare il potenziale elettrostatico totale al centro della sfera 1.
c) Ora si supponga che le due sfere siano sfere conduttrici, e che la distanza d sia sufficiente per trascurare fenomeni di induzione elettrostatica. Calcolare la nuova carica di ogni sfera, dopo che le due sfere sono state collegate da un filo conduttore di capacità elettrica trascurabile e hanno raggiunto una condizione di equilibrio.



Soluzione 1

1) Osserviamo che L è sia la lunghezza delle corde sia la lunghezza a riposo della molla quindi nella posizione di equilibrio la molla si trova compressa di una lunghezza dx =L(1-sinα). La forza elastica all'equilibrio sarà diretta quindi verso il basso. Orientando l'asse y verso l'alto e quello x da sx a dx, con origine sulla pallina, possiamo scrivere:

$$\vec{P} = -mg\hat{y}; \overrightarrow{F_{el}} = -kL(1-sin\alpha)\hat{y}; T_y = Tsin\alpha\hat{y}; T_x = \pm Tcos\alpha\hat{x}$$

dove il simbolo $\pm T$ indica che le due tensioni hanno componenti di segno opposto lungo l'asse x.
All'equilibrio si avrà una somma nulla lungo la direzione $\hat{x}$ mentre lungo $\hat{y}$:

$$2Tsin(\alpha) - mg - kL\big(1 - sin(\alpha)\big) = 0 \rightarrow T = \frac{mg + kL\big(1-sin(\alpha)\big)}{2sin(\alpha)}$$

Sostituendo m= 0.3Kg, L = 0.3m, k = 0.1 N/m T~4.44 N

2) Nell'istante in cui le corde si spezzano l'energia totale della pallina e' solo di tipo potenziale data dalla somma del potenziale gravitazionale ad altezza S-L(sinα) e dal potenziale della molla compressa di L(1-sinα)
Quindi:

$$U = mg\left(S - L\big(1 - sin(\alpha)\big)\right) + \frac{1}{2}k\left(L\big(1 - sin(\alpha)\big)\right)^2$$

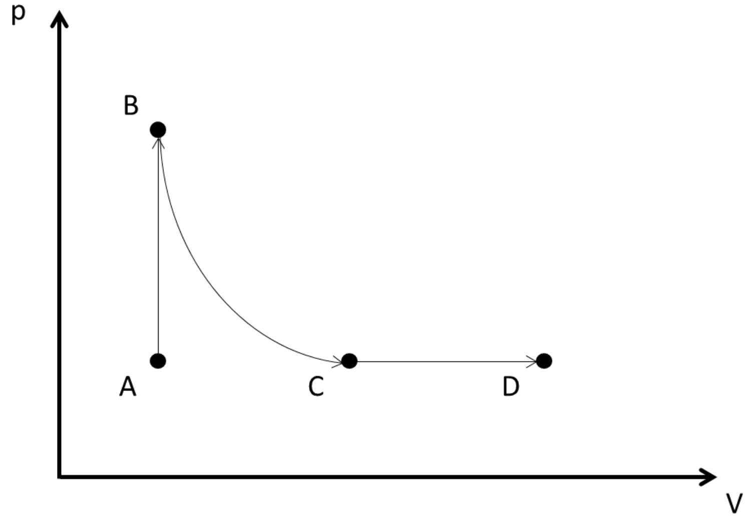
Sostituendo m= 0.3Kg, L = 0.3m, k = 0.1 N/m, S= 3m si ha U ~ 8.49 J

3)Al nuovo equilibrio la molla si fermerà ad un allungamento tale per cui la forza peso bilancia la forza elastica
ovvero :
kdx = mg → dx = mg/k
corrispondente ad una quota dal suolo: Q = S-(L+dx) = S-(L+mg/k) ~ 2.41 m

4) Applicando la conservazione dell'energia totale, la pallina tocca il suolo con una energia cinetica E = mgQ.
Al rimbalso essa si dimezza e la nuova quota massima sarà quindi:
mgH = 0.5 mgQ → H = Q/2 ~1.2 m

Soluzione 2

a) Il diagramma p-V si presenterà in questo modo



b) Per ricavare il lavoro compiuto dal gas e la variazione di energia interna in ciascuna trasformazione, si procede come segue:

Trasformazione AB (isocora):
$L_{AB} = 0J$ □ per definizione il lavoro di una trasformazione isocora è nullo.
$\Delta U_{AB} = nc_v\Delta T = nc_v(T_B - T_A) = nR\frac{3}{2}\left(\frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right) = nR\frac{3}{2}\left(\frac{p_A 2V_A}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right) = \frac{3}{2}p_A V_A = 7500J$

Trasformazione BC (isoterma):
$L_{BC} = nRT \cdot ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = p_C V_C \cdot ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = p_A 2V_A \cdot ln\left(\frac{2V_A}{V_A}\right) = p_A 2V_A \cdot ln(2) = 6931J$
$\Delta U_{BC} = 0J$ per definizione la variazione di energia interna in una trasformazione isoterma è nulla perché la temperatura è costante.

Trasformazione CD (isobara):
$L_{CD} = p_C(V_D - V_C) = p_A(4V_A - 2V_A)2p_A V_A = p_C(2V_C - V_C) = p_C V_C = 10000J$
$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - L_{CD} = nc_p(T_D - T_C) - p_C V_C = \frac{5}{2}nR\left(\frac{p_D V_D}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR}\right) - p_C V_C = \frac{5}{2}(2p_C V_C - p_C V_C) - p_C V_C = \frac{3}{2}p_C V_C = 15000J$

c) La temperatura iniziale della sfera di ferro si ricava assumendo che il calore totale scambiato durante il processo sia nullo.
$\sum Q_i = nc_v\Delta T + m_{Fe}c_{Fe}\Delta T = nc_v\left(T_f - T_D\right) + m_{Fe}c_{Fe}\left(T_f - T_{Fe}\right) = 0J$
$T_{Fe} = m_{Fe}\frac{c_{FeT_f + nc_v\left(T_f - T_D\right)}}{m_{Fe}c_{Fe}} = m_{Fe}\frac{c_{FeT_f + nc_v\left(T_f - \left(\frac{p_A 4V_A}{nR}\right)\right)}}{m_{Fe}c_{Fe}} = 583K$

Soluzione 3

a) Il campo elettrico generato dalla sfera 1 è diretto in direzione radiale e verso entrante in essa, mentre per la sfera 2 è uscente. Pertanto entrambi i campi in Q sono diretti lungo $-\hat{x}$, e lo stesso vale per direzione e verso del campo totale per il principio di sovrapposizione. Il modulo vale:

$$E_Q = \frac{k_0|Q_1|}{\left(\frac{3}{4}d\right)^2} + \frac{k_0|Q_2|}{\left(\frac{1}{4}d\right)^2} = \frac{33.8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{4} = 152.0\, N/C$$

Nel punto S, il campo generato dalla sfera 2 è nullo. Il campo totale è quindi solo quello generato dalla sfera 1, ed è diretto lungo $-\hat{x}$. Il suo modulo vale:

$$E_S = \frac{k_0|Q_1|}{(d+r)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(2.2)^2} = 3.72\, N/C$$

b) Per il principio di sovrapposizione, nel punto O si ha:

$$V_o = \frac{k_0 Q_1}{R_1} + \frac{k_0 Q_2}{d} = \frac{-9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0.2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9}}{2} = -72.0\, V$$

c) Se le due sfere sono conduttrici e si trascura l'induzione, quando esse vengono connesse tramite il filo, all'equilibrio avranno lo stesso potenziale, ovvero $V_1 = V_2$. Quindi:
$\frac{k_0 Q'_1}{R_1} = \frac{k_0 Q'_2}{R_2}$, quindi $Q'_1 = \frac{1Q'_2}{2}$
Inoltre la carica totale si conserva, quindi $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$, ovvero 2 nC = 1.5 Q'_2
$Q'_2 = 1.33$ nC , $Q'_1 = 0.66$ nC.