Esercizi preliminari per i corsi di

CALCOLO NUMERICO e ANALISI NUMERICA

Prof. F. Pitolli

A.A. 2012-13

1. Calcolare le soluzioni ξ_1, ξ_2 dell'equazione di secondo grado
$$p(x) = 0.05\,x^2 + 40.65\,x - 3 = 0.$$
Sostituire i valori di ξ_1, ξ_2 calcolati nell'equazione data: quanto vale la differenza tra i valori ottenuti e i valori esatti $p(\xi_1)$, $p(\xi_2)$?

2. Fare il grafico della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x)\,, & \text{per} \quad x \le 0\,, \\ \sin(\pi x)\,, & \text{per} \quad x > 0\,, \end{cases}$$
per $x \in I = [-1/2, 1/2]$. Calcolare e graficare le derivate f' e f''. f è derivabile in tutto I?

3. Data la funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)\,,$$
scrivere l'espressione della parabola che passa per i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 2$, dove x_i sono nodi equispaziati dell'intervallo $[-1/4, 1/2]$.

4. Graficare la funzione $f(x) = |x^2 - 4x + 7/4|$ per $x \in \mathbb{R}$. f è derivabile in tutto I?

5. Calcolare i massimi e minimi assoluti delle funzioni
$$\begin{array}{ll} f(x) = x(x-0.25)(x-0.75) & x \in [0, 0.75] \quad \text{e} \quad x \in [-0.5, 1.25] \\ f(x) = \cos(x + \frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}} & x \in [2, 5] \\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} & x \in [-1, 1] \\ f(x) = |x^2 - 4x + 7/4| & x \in [0, 3] \end{array}$$
negli intervalli indicati.

6. Verificare se le funzioni
$$\begin{array}{ll} f(x) = \mathrm{e}^{-x/4}\cos(x) & x \ge 0 \\ f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - x + 0.5 & x \in [-2, 2] \\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \end{array}$$
hanno zeri negli intervalli indicati. In caso affermativo calcolare tutti gli zeri di ciascuna funzione.

7. Calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx$.

8. Graficare la funzione $f(x) = 1/(1 + x^2)$ per $x \in [a, b] = [0, 1]$. Scrivere l'equazione della retta che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e graficarla (sovrapporre il grafico della retta al grafico di f). Calcolare la differenza tra l'area al di sotto del grafico di $f(x)$ e l'area del trapezio di vertici $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$, $(a, f(a))$.

9. Graficare la funzione $f(x) = 1/(1 + x^2)$ per $x \in [a, b] = [0, 1]$. Scrivere l'equazione della parabola che passa per i punti $(a, f(a))$, $(x_m, f(x_m))$ (x_m è il punto medio dell'intervallo di integrazione) e $(b, f(b))$ e graficarla (sovrapporre il grafico della parabola al grafico di f). Calcolare la differenza tra l'area al di sotto del grafico di $f(x)$ e l'area al di sotto della parabola.

10. Ripetere gli esercizi 8-9 con la funzione $f(x) = \cos(x + \frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}} + 1$, $x \in [2, 5]$.

11. Graficare la funzione $f(x) = \log(x + 1/e) + \sqrt{x+4} - 2$ e verificare che ha un unico zero per $x > 0$. Scrivere l'equazione della retta tangente a f nel punto $\tilde{x} = 0.4$ e graficarla (sovrapporre il grafico della retta al grafico di f). Determinare per via grafica la differenza tra lo zero di f e il punto di intersezione della retta tangente e l'asse delle x.

12. Si consideri di nuovo la funzione dell'esercizio precedente. Scrivere l'equazione della retta secante f nei punti $(0.4, f(0.4))$ e $(0.6, f(0.6))$ e graficarla (sovrapporre il grafico della retta al grafico di f). Determinare per via grafica la differenza tra lo zero di f e il punto di intersezione della retta secante e l'asse delle x.

    (Si suggerisce di fare i grafici degli esercizi 2-12 su carta millimetrata)

13. Calcolare la soluzione del sistema lineare
$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + z = 1 \\ \alpha\, x - 2y + z = -1 \end{cases}$$
in funzione del parametro α specificando per quali valori del parametro il sistema non ammette soluzione.

14. Siano λ_i, $i = 1, \ldots, n$, gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Calcolare il determinante di A.

15. Calcolare gli autovalori della matrice
$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2(1-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 3-\alpha \\ 0 & 3-\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$$
dipendente dal parametro reale α. Individuare i valori di α per cui la matrice A è singolare.

16. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
calcolare la matrice potenza $A^2 = AA$ e il suo determinante.

17. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata reale e siano λ_i i suoi autovalori. In quale relazione sono gli autovalori delle matrici A^{-1} (inversa), A^T (trasposta), A^k (potenza) con gli autovalori di A?

18. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata reale. In quale caso si può affermare che gli autovalori di A sono sicuramente tutti reali?

19. Sia

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

una matrice triangolare superiore. Quale è l'espressione del determinante di U? In quale caso U è singolare?

20. La successione di Fibonacci è una successione di numeri naturali in cui ogni termine è pari alla somma dei due termini precedenti. Calcolare i primi 10 numeri della successione tramite il procedimento ricorsivo

$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \\ x_i = x_{i-1} + x_{i-2} \quad i = 2, 3, \ldots, 10\,. \end{cases}$$

Quanti numeri della successione possono essere calcolati esattamente con una semplice calcolatrice scientifica?

21. Il fattoriale $N!$ di un numero intero N è pari al prodotto $N! = N\,(N-1)\,(N-2)\cdots 2\cdot 1$. Calcolare 10! tramite il procedimento ricorsivo

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = n\,x_{n-1} \quad n = 2, 3, \ldots, 10\,. \end{cases}$$

Quale è il massimo intero N per il quale $N!$ può essere calcolato esattamente con una semplice calcolatrice scientifica?

22. Calcolare i coefficienti binomiali $\binom{6}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$.