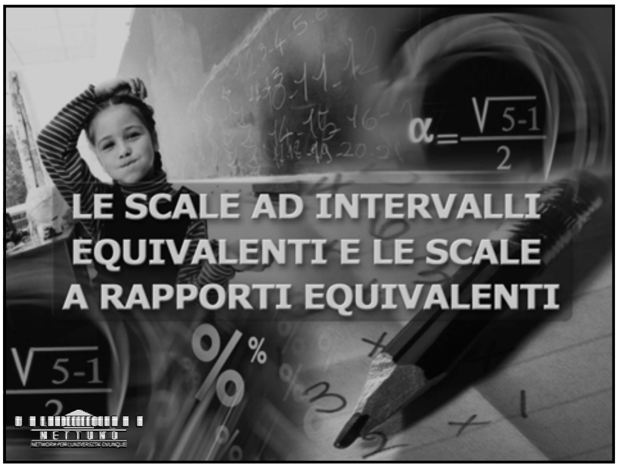
Prof. Giulio Vidotto (Università di Padova)

Lez. 7 - ***Le scale ad intervalli equivalenti e le scale a rapporti equivalenti***



Argomenti della lezione

- Scala ad Intervalli Equivalenti
- Scala a Rapporti Equivalenti

1 **Intervalli Equivalenti:**
teorema di rappresentazione
teorema di unicità,
regole per costruire una scala a intervalli equivalenti

2 **Rapporti Equivalenti:**
teorema di rappresentazione
teorema di unicità,
regole per costruire una scala a rapporti equivalenti

Scala ad Intervalli Equivalenti

I sistemi empirici delle differenze si basano su una relazione quaternaria: Ã = < A, Q >.

Vi è un ordine largo totale fra elementi e un ordine largo totale fra le differenze fra elementi.

Per misurare questi sistemi dobbiamo costruire un omomorfismo φ che associa ad essi dei sistemi relazionali numerici che ben li rappresentano.

Scala ad Intervalli per sistemi delle differenze finiti ed equispaziati

Teorema di rappresentazione

Se Ã = < A, Q > è un sistema delle differenze finito ed equispaziato, è possibile costruire un omomorfismo

φ: Ã $\rightarrow \Re$, = < R, Q >

dove Q è la relazione quaternaria definita nel modo seguente :

$(\alpha_1, \alpha_2)\ Q\ (\alpha_3, \alpha_4) \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \leq \alpha_4 - \alpha_3$

$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in$ R

Teorema di Unicità

Le scale si misura per sistemi delle differenze finiti ed equispaziati sono definite a meno di trasformazioni lineari positive, trasformazioni cioè del tipo

$f(x) = ax + b$ con $a > 0$

La famiglia delle trasformazioni permissibili per la scala S = { Ã, $\Re$, φ} è costituita da tutte le funzioni lineari positive f tali che se S' = { Ã, $\Re$, φ'} è una nuova scala, allora l'omomorfismo φ' è definito come $\varphi' = f \circ \varphi$

Le funzioni f sono funzioni numeriche definite in φ(A), insieme immagine di φ ($\varphi(A) \subset \Re$)

Regole per Costruire una Scala ad Intervalli

Sia Ã = < A, ~, < > dotato di un ordine largo totale e quindi con un ordine stretto totale fra le classi di equivalenza. Supponiamo che gli elementi di Ã'= Ã/~ siano così ordinati [x] < [y] < [z] < ... < [·]

Chiameremo elemento minimale

di A, rispetto all'ordine $\leq$ definito, un elemento $\xi \in$ A tale che $\forall$ x $\in$ A, si abbia $\xi \leq x$, ossia $\xi \sim x$ oppure $\xi < x$

Nel caso in cui ci siano in A più elementi, fra loro equivalenti, che sono minimali: allora per elemento minimale si intende la classe di equivalenza $\xi = [\ \xi_1,\ \xi_2, \dots]$ di $\tilde{A}' = \tilde{A}/\sim$ tale che $\forall$ x $\in$ A sia $\xi \leq x$ per i = 1, 2, ...

Quindi: siamo sicuri che esiste in A un elemento minimale perché l'insieme A è finito, per ipotesi.

1° metodo di costruzione della scala:

➔ associamo agli elementi di una stessa classe di equivalenza lo stesso numero e a classi di equivalenza diverse numeri diversi

Se due classi sono distinte, ad esempio [x] $\neq$ [y], allora nell'omomorfismo φ che stiamo costruendo, anche i trasformati sono distinti:

$$\alpha = \varphi([x]) \neq \varphi([y]) = \beta$$

➔ Associamo all'elemento minimale $\xi \in$ A il numero 0 ($\varphi(\xi) = 0$)

➔ Se l'elemento x $\in$ A si trova ad n intervalli I dall'elemento minimale ξ, allora poniamo $\varphi(x) = n$

Possiamo scrivere l'omomorfismo $\varphi : \tilde{A} \rightarrow \Re$ tale che

$$\varphi([\cdot]) = \alpha,\ \varphi(\xi) = 0$$

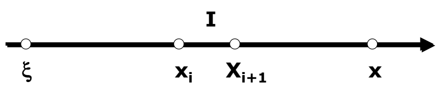
e

$$\varphi(x) = n$$

2° metodo di costruzione della scala:

➔ **associamo agli elementi minimali un numero diverso da 0 e fissiamo, come scarto costante fra due qualunque elementi contigui, un numero positivo diverso da 1**

Si ottiene così, per lo stesso sistema empirico $\tilde{A}$ una scala con una nuova origine e una nuova unità di misura



Consideriamo due elementi contigui (x_i ed x_{i+1}) e consideriamo la distanza costante fra loro che scriviamo come la differenza dei trasformati: $\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = u$ con u numero qualsiasi, allora…

All'elemento minimale ξ associamo il numero che scriviamo come $\varphi(\xi)$. Se x è un elemento che si trova ad n intervalli I di ampiezza u da ξ, ad esso si associa il seguente numero:

$$\varphi(\xi) = \varphi(x) + nu$$

con $u = \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)$

Ritornando alla figura precedente, possiamo anche scrivere

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + 6u$$

Se fissiamo come origine il numero $\varphi(\xi) = 3$ e come unità di misura $u = \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = 2$

otteniamo

$$\varphi(x) = 3 + 6 \cdot 2 = 15$$

Scala ad Intervalli per sistemi infiniti delle differenze

Teorema di rappresentazione

Se $\tilde{A} = < A, Q >$ è un sistema infinito di differenze è possibile costruire un omomorfismo

$$\varphi: \quad \tilde{A} \rightarrow \Re, = < R, Q >$$

Dove Q è la relazione quaternaria così definita:

$$(\alpha_1, \alpha_2)\ Q\ (\alpha_3, \alpha_4) \Leftrightarrow (\alpha_2-\alpha_1) \leq (\alpha_4-\alpha_3)$$

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$$

Questa φ è un omomorfismo $\varphi : \tilde{A} \rightarrow \Re$ perché se $x, y \in A$ ed x precede y, cioè $x < y$, allora $\alpha = \varphi(x) < \varphi(y) = \beta$, in quanto il numero α di elementi che precedono x è minore del numero β degli elementi che precedono y

Teorema di Unicità

Le scale si misura, per sistemi infiniti delle differenze, sono definite a meno di trasformazioni lineari positive

$$f(x) = ax + b \text{ con } a > 0$$

Regole per Costruire una scala ad intervalli

Sia Ã = < A, Q > dotato d un ordine largo totale; possiamo anche scriverlo così Ã=< A, ~, < > oppure anche Ã=< A / ~, < >. Costruiamo una scala nel seguente modo:

- **associamo ad un qualsiasi elemento z ∈ A il numero 0**
- **fissiamo un qualunque numero reale positivo u come unità di misura**
- **per ogni elemento y ∈ A calcoliamo il rapporto α = (y - z) / u dove (y - z) è la distanza di y da z, α è un numero reale che esprime la misura di y**

Si è costruita quindi una applicazione φ tale che:

φ: Ã $\rightarrow \Re$, y $\rightarrow \varphi(y) = \alpha$

che è un omomorfismo perché conserva l'ordine esistente in A

Esempio

Nella misura dell'ansia pre - agonistica, si ottengono i seguenti punteggi:

Marco → 30
Luca → 36
Edoardo → 42

Scala a Rapporti Equivalenti

Sia Ã = < A, ~, <, + > un sistema additivo nel quale, oltre alla equivalenza e all'ordine stretto totale, c'è anche una operazione di addizione che gode delle proprietà associativa e commutativa

Esempio

Se A è un insieme di oggetti, la relazione binaria può essere "pesare almeno tanto quanto" e l'operazione di addizione può essere "la sovrapposizione di un oggetto ad un altro sullo stesso piatto di una bilancia"

La proprietà che caratterizza i sistemi additivi rispetto agli altri, e che esiste un elemento di intensità nulla, ossia il numero 0 è ben individuato

Teorema di rappresentazione

Se $\tilde{A}$ = < A, Q > è un sistema infinito di differenze è possibile costruire una scala di misura da $\tilde{A}$ ad $\Re_0^+ = < \Re_0^+, \geq, + >$ dove con $\Re_0^+$ intendiamo dei numeri reali positivi o nulli

Teorema di Unicità

Le scale si misura, per sistemi infiniti delle differenze, sono definite a meno di dilatazioni del tipo

$f(x) = ax$ con $a > 0$

La famiglia delle trasformazioni permissibili per la scala $S = \{ \tilde{A}, \Re_0^+, \varphi\}$ è costituita da tutte le dilatazioni positive f tali che se $S' = \{ \tilde{A}, \Re_0^+, \varphi'\}$ è una nuova scala allora l'omomorfismo φ' è definito come $\varphi' = f \circ \varphi$

Le dilatazioni o similitudini dirette sono particolari trasformazioni lineari positive, si chiamano così perché sono caratterizzate dal fatto di lasciare invariati i rapporti fra i valori scalari

Regole per costruire una scala a rapporti equivalenti

Associamo all'elemento nullo di A, che presenta cioè la caratteristica con grado nullo, il numero 0. Fissiamo, arbitrariamente una unità di misura u

Ad ogni elemento $z \in A$ associamo un numero $\alpha = \varphi(z)$ così definito: $\alpha = \varphi(z) = (z - 0) / u$

dove $(z - 0)$ rappresenta la distanza di z dall'origine ed α è un numero reale razionale o irrazionale

Esempio

se $\alpha = p / q$, quindi $z = u (p / q) = p (u / q)$ significa che il sottomultiplo di u secondo q sta in z un numero intero p di volte

Esempio

se $\alpha = p / q$, quindi $z = u (p / q) = p (u / q)$ significa che il sottomultiplo di u secondo q sta in z un numero intero p di volte

Conclusione della lezione

- ➔ **Scala ad Intervalli Equivalenti**
- ➔ **Scala a Rapporti Equivalenti**