Prof. Giulio Vidotto (Università di Padova)

Lez. 5 - ***Variabili e scale di misura***

Argomenti della lezione

- ➔ Variabili
- ➔ Concetto di Misura
- ➔ Sistemi Relazionali Empirici
- ➔ Sistemi Relazionali Numerici
- ➔ Scale di Misura
- ➔ Scale Equivalenti

Variabili

Variabili

Una variabile è una qualche proprietà di un evento reale che è stata misurata, ad esempio è una misura relativa al comportamento di un soggetto

La variabile dipendente

Definiamo una variabile dipendente quando "dipende" dal valore di un'altra variabile (la variabile indipendente); quest'ultima è detta anche causa. Nel linguaggio della psicologia degli stimoli e delle risposte, la variabile dipendente è la risposta.

Alcune variabili possono assumere qualsiasi valore in un insieme continuo (Variabili Continue), non sono limitate a certi valori, come i numeri interi, o a categorie separate. Le variabili discontinue rientrano in categorie distinte (ad es. vero-falso)

La distinzione fra variabili quantitative e variabili qualitative è facile in teoria, ma in pratica può essere difficile applicarla a casi particolari

Le variabili quantitative sono quelle che variano in grandezza (intensità di un suono), mentre quelle qualitative cambiano genere (altezza di un suono)

Fra le variabili indipendenti, alcune sono variabili fisiche, come l'intensità della luce.
Le variabili non fisiche sono variabili non definite direttamente in termini fisici (preferenza verso un prodotto).

Misurare

- ➔ **Caws: ordinare gli elementi del SE, rispetto ad una caratteristica che essi presentano, ed individuare un insieme ordinato di numeri che sia in corrispondenza biunivoca con SE l'insieme numerico che si trova è un sottoinsieme SN dei numeri reali $\Re$**

Concetto di Misura

Misurare

- ➔ **Russel: determinare un metodo che stabilisca una corrispondenza biunivoca fra grandezze e numeri**
- ➔ **Krantz: misurare degli oggetti significa associare loro dei numeri (matematicamente)**

Misurare

- ➔ **Stevens: assegnare una corrispondenza fra proprietà e relazioni di un sistema empirico SE ed un modello formale**

Per ottenere un adeguato Sistema Relazionale Empirico (SRE) si devono ricercare delle relazioni tali per cui:

1

sia data una legge di composizione ben definita empiricamente in un corrispettivo fisico
(es. la somma di due oggetti sullo stesso piatto di una bilancia)

Per ottenere un adeguato Sistema Relazionale Empirico (SRE) si devono ricercare delle relazioni tali per cui:

2

l'insieme degli oggetti nel SRE sia "chiuso"; ossia, componendo due elementi dell'insieme, si ottenga ancora un elemento dell'insieme

Quando misuriamo una proprietà costituiamo un modello, cioè un Sistema Relazionale Numerico che rifletta la struttura empirica della proprietà considerata.
Una volta costruiti i sistemi relazionali si deve precisare la natura della corrispondenza

Teorema di Rappresentazione:

- ➔ **permette di costruire una scala di misura e garantisce che, se sono soddisfatte certe ipotesi in SRE, esiste una scala di misura S = { SRE, SRN, φ}**

Teorema dell'Unicità:

- ➔ **permette di individuare le condizioni per cui si può passare da una scala di misura ad un'altra, entrambe definite sullo stesso SRE**

Nella teoria della stima, una caratteristica si dirà significante se i valori di scala trasformati, secondo il tipo di trasformazione ammesso sulla scala considerata, saranno equivalenti rispetto ad un dato problema a quelli iniziali, cioè conterranno la stessa informazione

Sistemi Relazionali Empirici

Gli elementi dell'insieme empirico A sono collegati fra loro da particolari relazioni che indichiamo con R_1, R_2, … R_n chiamate relazioni empiriche

- **Definiamo "grado della relazione empirica" il numero di elementi di A che essa collega**
- **Una relazione è di grado N in A se considera n-uple ordinate di elementi di A, ossia se definisce un sottoinsieme del prodotto cartesiano**

Definiamo come Sistemi Relazionali Empirici gli insiemi empirici A dotati di una o più relazioni Q, R_1, R_2, … e scriviamo:

$$SRE = \langle A, Q \rangle$$

$$SRE = \langle A, R_1, R_2, \ldots \rangle$$

Sistemi Binari

Se l'insieme A è dotato di una relazione binaria R il sistema relazionale $\tilde{A} = \langle A, R \rangle$ può essere:

- **Classificatorio: la relazione R è di equivalenza, il sistema è $\tilde{A} = \langle A, \sim \rangle$**
- **Ordinato: la relazione R è di ordine, il sistema è $\tilde{A} = \langle A, <, \sim \rangle$**

Sistemi Quaternari

L'insieme A è dotato di una relazione quaternaria Q (che collega quaterne ordinate formate con elementi di A). Il sistema si scrive: $\tilde{A} = \langle A, Q \rangle$

Sistemi delle Differenze:

- **sistema delle differenze finito equispaziato**
- **sistema delle differenza infinito**

Dato il SE Ã = < A, Q > con Q relazione quaternaria, Ã è un SE delle differenze se

- ➔ **Q è transitiva in A**
- ➔ **Q è fortemente connessa in A**
- ➔ **Q soddisfa la legge dell'invertibilità del segno**
- ➔ **Q soddisfa alla monotonicità larga**

Se abbiamo un sistema empirico delle differenze Ã=<A,Q> soddisfacente alle 4 proprietà ora elencate e se in più A è finito e gli elementi di A, non equivalenti rispetto alla "~", sono equispaziati, Ã è chiamato sistema delle differenze finito equispaziato

Se abbiamo un sistema empirico delle differenze Ã=<A,Q> e se Ã è finito e gli elementi, non equivalenti rispetto alla "~", sono equispaziati, Ã è chiamato sistema delle differenze finito equispaziato

Sia A un insieme con infiniti elementi e sia Q una relazione quaternaria in A, diciamo che il sistema relazionale Ã=<A,Q> è un sistema infinito delle differenze se esiste uno $z \in A$ tale che, $\forall\, x_1, x_2 \in A$, si abbia $(x_1,z)\ Q(z,x_2)$ oppure $(z,x_2)\ Q(x_1,z)$

Sistemi Additivi

È presente una relazione di equivalenza congiunta con un ordine stretto totale e in cui si può definire una operazione di addizione che goda delle proprietà associativa e commutativa, è convenzionalmente definito Ã = < A, ~, <, + >

Sistemi Relazionali Numerici

Sappiamo che $\Re$ è dotato delle due operazioni di addizione e moltiplicazione e della relazione di ordine lineare, rispetto alle quali è un corpo commutativo ordinato, che rappresentiamo come $\{\Re, +, x, \leq\}$ oppure $< \Re, +, x, \leq >$

Se consideriamo $\Re$ o un suo sottoinsieme dotato solo di particolari relazioni e non di operazioni, allora l'insieme numerico è chiamato sistema relazionale numerico. Questi possono essere di diversi tipi...

Sistema Numerico Binario

1. **Sistema numerico classificatorio: la relazione binaria è di equivalenza $< \Re, = >$**
2. **Sistemi numerici ordinati: la relazione binaria è l'ordine (serie numerica $< \Re, < >$, quasi-serie numerica $<\Re, \leq >$)**

Sistema Numerico Quaternario
Esiste un ordine largo totale fra le differenze; si ha il sistema $< \Re, Q >$ dove Q è così definita

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re$$

$$(x_1, x_2)\ Q\ (x_3, x_4) \Leftrightarrow x_2 - x_1 \leq x_4 - x_3$$

Sistema Numerico Additivo
Se in $\Re$ oltre alla relazione d'ordine, consideriamo anche l'operazione di addizione, che soddisfa alla proprietà

$$\forall\ x, y \in \Re \text{ se } x \leq y$$

è vero che

$$\forall\ z \in \Re:\ x + z \leq y + z$$

Sistema Numerico moltiplicativo
Se in $\Re$ oltre alla relazione di ordine, consideriamo anche l'operazione di moltiplicazione che soddisfa alla proprietà $\forall\ x, y \in \Re$ se $x \leq y$ allora:

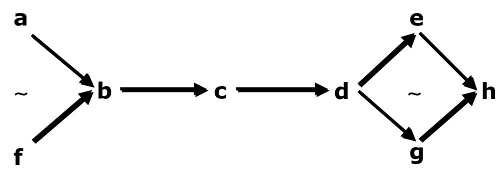
$\forall z \in \Re$, $z > 0$ si ha che $xz \leq yz$ (si mantiene l'ordine)

$\forall z \in \Re$, $z < 0$ si ha che $yz \leq xz$ (si inverte l'ordine)

Scale di Misura

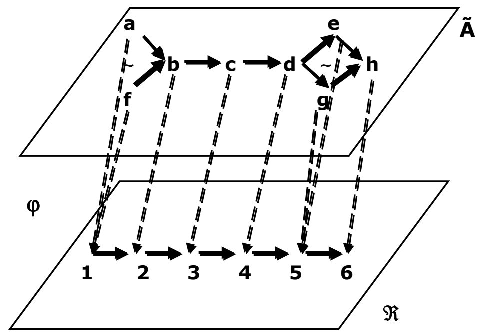
Definiamo come scala di misura la terna {SRE, SRN, φ} formata dal sistema empirico SRE, dal sistema numerico SRN e dall'omomorfismo φ che li collega

Bisogna che φ connetta in modo coerente la struttura del primo sistema a quella del secondo, perciò le strutture dei due sistemi devono essere fra loro conformi. Ad esempio, sia dato un SRE Ã = < A, <, ~> questo è rappresentabile come…



Gli elementi a ed f come e e g sono uguali, le frecce indicano una relazione d'ordine

Se consideriamo il Sistema Relazionale Numerico ℜ = <R, ≤ > dove R è l'insieme dei Numeri Reali e ≤ è la nota relazione d'ordine, possiamo scrivere la scala di misura che de ne deriva S = { Ã, < ℜ, ≤ >, φ} anche con i diagrammi di Venn, ossia…



Scale Equivalenti

Scale Equivalenti

Diciamo quindi che due scale S ed S' sono equivalenti quando misurano lo stesso sistema SRE, ossia quando sono così definite:

S = {SRE, SRN, φ}

S' = {SRE, SRN, φ'}

Perché questo succeda bisogna che i due omomorfismi φ e φ' siano collegati fra loro da particolari funzioni f (funzioni permissibili) aventi come dominio l'insieme immagine di φ (ossia φ(Ã)) che è contenuto in SN=ℜ e soddisfacenti la relazione: φ'=f°φ

Saranno successivamente approfondite 4 tipi di scale di misura:

- ➔ nominale
- ➔ ordinale
- ➔ ad intervalli equivalenti
- ➔ a rapporti equivalenti

Conclusione della lezione

- ➔ Variabili
- ➔ Concetto di Misura
- ➔ Sistemi Relazionali Empirici
- ➔ Sistemi Relazionali Numerici
- ➔ Scale di Misura
- ➔ Scale Equivalenti