
**Trasformazione e Significanza delle Statistiche:**

- ➔ **Invarianza assoluta**
- ➔ **Invarianza di riferimento**
- ➔ **Invarianza di confronto**
- ➔ **Schemi Riassuntivi**

## Significanza e Trasformazioni delle Statistiche

**Data una S = {A, Re, f}**
**ed una S′ = {A, Re, f′}**
**in cui $f' = \varnothing(f)$ ed $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$**
**per entrambi S ed S′**

## Per cui

$f(A) = \{f(a_1), f(a_2),\dots, f(a_n)\}$

$f'(A) = \{f'(a_1), f'(a_2),\dots, f'(a_n)\}$

**Si dice che una statistica è significante se, calcolata su due sistemi numerici (S, S′) entrambi omomorfi ad uno stesso sistema empirico A, essa rimane invariante cioè continua a descrivere la medesima caratteristica empirica**

**Si sono rispettate, quindi, le proprietà della scala di misura, nello scegliere una statistica se essa rimane invariante, quando viene calcolata su un insieme numerico ottenuto per mezzo di una trasformazione permissibile**

**Quindi**

**data una particolare scala di misura ed una trasformazione permissibile, una statistica è significante per la scala se, calcolata sull'insieme numerico trasformato, essa rimane invariante, ossia descrive la medesima caratteristica empirica**

| Scala | Trasformazioni ammissibili |
|---|---|
| Nominale | Corrispondenze biunivoche |
| Ordinale | Funzioni monotone crescenti |
| Intervallo | Funzioni lineari positive $f(x) = a + bx$ |
| Rapporto | Similarità $f(x) = bx$ |

**Invarianza assoluta**

**Siano date due scale di misura ($S_1$, $S_2$) appartenenti allo stesso SRE, sia detta $\Phi$ la trasformazione che permette di passare da $S_1$ a $S_2$. Siano date inoltre le due statistiche ($St_1$, $St_2$) calcolate rispettivamente su $S_1$ ed $S_2$.**

**Invarianza assoluta**

**Si parla di invarianza assoluta quando il valore della statistica non varia passando da $S_1$ a $S_2$ ossia non è influenzato dalla trasformazione**

**In altri termini, si ha invarianza assoluta se sussiste l'uguaglianza fra**

$$St\ \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$$

**e**

$$St'\ \{f'(a_1), f'(a_2), \ldots, f'(a_n)\}$$

**il valore di St è uguale a quello di St'**

**Ad esempio**

**I punti z sono Invarianti in senso Assoluto, di Riferimento e di Confronto per le Scale ad intervalli equivalenti**

**Dato che**

**$z = (X - \text{Media}) / s$**

**un punto z, che dipende dalla Media e da s, non varia il suo valore se, applicata una funzione lineare**

**$f(x) = 2x + 1$**
**ai dati**
**$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$,**
**si ottiene**
**$X' = \{3, 5, 7, 9, 13, 17\}$**

**Con i seguenti valori:**

**Media $\overline{X} = 4$ e $s = 2.38$**

**Media $\overline{X'} = 9$ e $s = 4.76$**

**quindi....**

**$z_2 = (2 - 4) / 2.38 = -.84$**

**$z'_2 = (5 - 9) / 4.76 = -.84$**

**Invarianza di riferimento**

**Siano date due scale di misura ($S_1$, $S_2$) che si riferiscono allo stesso SRE, sia detta $\Phi$ la trasformazione che permette di passare da $S_1$ a $S_2$. Siano ancora date le due statistiche ($St_1$, $St_2$) calcolate rispettivamente sulle su $S_1$ ed $S_2$ si può definire invarianza di riferimento quando**
**$S_2 = \Phi(S_1) \rightarrow St_2 = \Phi(St_1)$**

**In altri termini, si ha Invarianza di Riferimento se**

**$f(a_k) = St\ \{f(a_1), f(a_2), \dots f(a_n)\}$**

**$\Downarrow$**

**$f(a_k) = St'\ \{f'(a_1), f'(a_2), \dots f'(a_n)\}$**

**ossia, St' si riferisce all'elemento $a_k$ ed è trasformata secondo il criterio**

**$f' = \varnothing\ (f)$**

**Ad esempio**

**La Moda è Invariante di Riferimento per tutte le $\varnothing$ e per tutte le Scale**

**Siano dati su scala ordinale**
**$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$**
**$X = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5\}$**
**Sia data la funzione di trasformazione**
**$f(x) = x^2$**

**applicando la trasformazione...**
**$X' = \{1, 4, 4, 9, 9, 9, 16, 25\}$**
**da cui segue che**

**Mo = 3        Mo' = 9**

**La moda è quindi Invariante di Riferimento per la Scala Ordinale**

**La Mediana è Invariante di Riferimento per le Scale Ordinali**

Sia dato su scala ordinale

A = {a1, a2, a3, a4, a5}

Mdn = {4, 4, 5, 6, 7} = 5

**Applicando la funzione di trasformazione $f(x) = x^2 / 2$ si ha che**

A = {a1, a2, a3, a4, a5}

↑

Mdn = {4, 4, 5, 6, 7} = 5

↑

Mdn = {8, 8, 12.5, 18, 24.5}=12.5

da ciò si evince che: $5^2 / 2 = 12.5$

**La Media è Invariante di Riferimento per le Scale ad Intervalli**

Siano dati quindi

A {a1, a2, a3, a4, a5, a6}

Media = {1, 2, 3, 4, 6, 8} = 4

**Applicando la funzione di trasformazione**

**$f(x) = 2x + 1$**

si ha che

Media = {3, 5, 7, 9, 13, 17} = 9

da ciò si evince che:

9 = 2 (4) + 1

**Invarianza di Confronto**

Siano date due scale di misura ($S_1$, $S_2$) appartenenti allo stesso SRE, sia detta $\Phi$ la trasformazione che permette di passare da $S_1$ a $S_2$. Siano ancora date le due statistiche ($St_1$, $St_2$) calcolate rispettivamente sulle due scale di misura $S_1$ ed $S_2$

Dati due insiemi numerici e una statistica calcolata sui due insiemi, si parla di invarianza di confronto quando le due statistiche, uguali tra loro prima della trasformazione, rimangono uguali quando viene applicata la trasformazione permissibile

**Ovvero, siano dati due insiemi (A e B) e facenti riferimento alla scala di misura $S_1$. Siano anche dati altri due Insiemi (A', B') ottenuti dalle trasformazioni della scala di misura $S_1$ in $S_2$. Siano ancora dati i valori delle statistiche calcolati sui quattro campioni**

**Allora se è vero che**

**$St(A) = St(B)$**

**allora**

**$St(A') = St(B')$**

**In altri termini sia data l'uguaglianza fra le statistiche**

$$St\ \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\} =$$
$$= St\ \{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n)\}$$

**segue che (dopo opportuna trasformazione $\Phi$) si ha**

$$St'\ \{f'(a_1), f'(a_2), \ldots, f'(a_n)\} =$$
$$= St'\ \{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n)\}$$

**La Moda, oltre ad essere Invariante di Riferimento, è anche Invariante di Confronto per tutte le ∅ e per tutte le Scale**

**Ad esempio**

**Siano date su scala ordinale**

$$Mo_1\ \{1, 2, 2, 3\} = 2$$
$$Mo_2\ \{1, 2, 2, 5\} = 2$$

**Applicando la funzione di trasformazione**

**$f(x) = x^2$**

**si ottiene:**

$$Mo'_1\ \{1, 4, 4, 9\} = 4$$
$$Mo'_2\ \{1, 4, 4, 25\} = 4$$

**La Moda è Invariante di Confronto a livello di Scala Ordinale**

**La Mediana, oltre ad essere Invariante di Confronto per le scale ad Intervalli**

**Siano dati su scala ordinale**

$\mathbf{Mdn_1}$ {5, 6, 7} = 6

$\mathbf{Mdn_2}$ {4, 6, 8} = 6

**Applicando la funzione di trasformazione**

**f(x) = 2x + 2**

**si ha che**

$\mathbf{Mdn'_1}$ {12, 14, 16} = 14

$\mathbf{Mdn'_2}$ {10, 14, 18} = 14

**da ciò si evince che le mediane risultano uguali anche dopo la trasformazione**

**La Media, oltre ad essere Invariante di Riferimento, è anche Invariante di Confronto per le Scale ad Intervalli**

**Siano dati quindi**

**Media** $\mathbf{X_1}$ {2, 3, 4} = 3

**Media** $\mathbf{X_2}$ {2, 4} = 3

**Applicando la funzione di trasformazione**

**f(x) = 2x + 1**

**si ha che**

**Media** $\mathbf{X_1}$ = {5, 7, 9} = 7

**Media** $\mathbf{X_2}$ = {5, 9} = 7

**da ciò si evince che le medie risultano uguali anche dopo la trasformazione**

**La Deviazione Standard è Invariante di Confronto per le Scale ad Intervalli**

**Siano dati:**

$\mathbf{A_1}$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8}
$\mathbf{Media_1}$ = 4   $\mathbf{s_1}$ = 2.38

$\mathbf{A_2}$ = {2, 3, 4, 5, 7, 9}
$\mathbf{Media_2}$ = 5   $\mathbf{s_2}$ = 2.38

**Applicando la funzione di trasformazione**

**$f(x) = 2x + 1$**

**si ha che**

**$A'_1 = \{3, 5, 7, 9, 13, 17\}$**
**$Media'_1 = 9$ $s'_1 = 4.76$**
**$A'_2 = \{5, 7, 9, 11, 15, 19\}$**
**$Media'_2 = 11$ $s'_2 = 4.76$**

**da ciò si evince che:**
**$2 \cdot 2.38 = 4.76$**

## da ciò si evince che:

$$2 \cdot 2.38 = 4.76$$

$$2 \cdot s = s'$$

## 1° Schema riassuntivo

| Scala | Trasformazioni ammissibili |
|---|---|
| Nominale | Corrispondenze biunivoche |
| Ordinale | Funzioni monotone crescenti |
| Intervallo | Funzioni lineari positive |
| Rapporto | Similarità |

## 2° Schema riassuntivo

**Relazioni tra tipi di invarianza**

invarianza assoluta $\Rightarrow$ invarianza di riferimento $\Rightarrow$ invarianza di confronto

**Se una statistica è significante ad un certo livello di scala, lo sarà anche ad un livello di scala ad essa superiore**

## 3° Schema riassuntivo

| Sistema empirico | Livello di scala | Trasformazioni permissibili | Statistiche |
|---|---|---|---|
| Classificatorio | Nominale | Corrispondenze biunivoche | Numero di classi di equivalenza<br>Moda |
| Ordinato | Ordinale | Funzioni monotone crescenti in senso stretto | Mediana<br>Quantili |
| Delle differenze | Intervallo | Trasformazioni lineari positive | Media<br>Varianza<br>Punti z |
| Additivo | Rapporto | Similitudini dirette | Coefficiente di variazione |