Compito Scritto Meccanica Quantistica, 30/01/2018

Esercizio 1. Si considerino due particelle indistinguibili, A e B, di spin 1/2, soggette alla Hamiltoniana

$$H = H_0(\mathbf{p}_A, \mathbf{r}_A) + H_0(\mathbf{p}_B, \mathbf{r}_B) + \frac{\alpha}{\hbar} L_z S_z$$

dove $\mathbf{L} = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$ e

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{2m\omega^2}{9} z^2$$

Si supponga $\alpha \ll \omega$.

a) Si calcolino le energie E e le degenerazioni dei livelli del sistema con $E < E_{\max} = \frac{11}{3}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$.
b) Si determinino tutti gli stati che godono delle seguenti proprietà: una misura dell'energia fornisce con certezza un valore inferiore a $E_{\max}$; un misura di L_z fornisce con certezza $\hbar$; una misura di S_z fornisce $\hbar$ con probabilità 1/2 e $-\hbar$ con probabilità 1/2.
c) Tra gli stati determinati al punto b) si determini lo stato ψ che soddisfa a $\langle\psi|S_x^2|\psi\rangle = 0$.
d) In una misura di S_x su ψ, quali valori si possono trovare e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si considerino due particelle di spin 1/2, non identiche. Al tempo $t = 0$ la prima particelle si trova in uno stato di momento angolare orbitale $\ell_1 = 1$ e momento angolare totale $j_1 = 1/2$ e $j_{1z} = 1/2$ ($\mathbf{j}_1 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_1$), mentre la seconda si trova in uno stato di momento angolare orbitale $\ell_2 = 1$ e momento angolare totale $j_2 = 3/2$ e $j_{2z} = -1/2$ ($\mathbf{j}_2 = \mathbf{l}_2 + \mathbf{s}_2$). Qui sopra abbiamo espresso i momenti angolari in unità adimensionali, ovvero $\mathbf{J} = \hbar\mathbf{j}$, $\mathbf{L} = \hbar\mathbf{l}$ e $\mathbf{S} = \hbar\mathbf{s}$ sia per le singole particelle che per il sistema totale.

L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$\mathcal{H} = \frac{J^2}{2I} + \alpha J_z\,,$$

dove $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.
a) Determinare l'evoluzione temporale dello stato a un istante t generico.
b) Se al tempo t si misura j_{2z}, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?
c) Determinare il tempo minimo t_m per il quale lo stato totale del sistema al tempo t coincide con quello al tempo $t = 0$.
d) Se al tempo $t = 0$ si misura s_{2z}, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

Esercizio ①

Ricordiamo lo spettro dell'Hamiltoniana 2D

$H_{2D} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$

$\underline{l_z = \pm 3, \pm 1}$ $\quad 4\hbar\omega$

$\underline{l_z = \pm 2, 0}$ $\quad 3\hbar\omega$

$\underline{l_z = \pm 1}$ $\quad 2\hbar\omega$

$\underline{l_z = 0}$ $\quad \hbar\omega$

Dato che $H = H_{2D} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 z^2 \qquad \Omega = \frac{2}{3}\omega$

gli stati di singola particella sono

① $E(n_{2D}=0, n_z=0) = \hbar\omega + \frac{2}{3}\hbar\omega\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3}\hbar\omega$ | 1 stato $l_z = 0$

② $E(n_{2D}=0, n_z=1) = \frac{4}{3}\hbar\omega + \frac{2}{3}\hbar\omega = 2\hbar\omega$ | 1 stato $l_z = 0$

③ $E(n_{2D}=1, n_z=0) = \frac{4}{3}\hbar\omega + \hbar\omega = \frac{7}{3}\hbar\omega$ | 2 stati $l_z = \pm 1$

④ $E(n_{2D}=0, n_z=2) = \frac{4}{3}\hbar\omega + \frac{4}{3}\hbar\omega = \frac{8}{3}\hbar\omega$ | 1 stato $l_z = 0$

⑤ $E(n_{2D}=1, n_z=1) = \frac{4}{3}\hbar\omega + \hbar\omega + \frac{2}{3}\hbar\omega = 3\hbar\omega$ | 2 stati $l_z = \pm 1$

ecc.

Gli unici stati a due particelle possibili sono quindi

$[\psi = |n_D, n_z, l_z\rangle]$

① $|0\,0\,0\rangle_1 |0\,0\,0\rangle_2 \qquad E = 2\cdot\frac{4}{3}\hbar\omega = \frac{8}{3}\hbar\omega$

② $\begin{cases} |0\,0\,0\rangle_1 |0\,1\,0\rangle_2 \\ |0\,1\,0\rangle_1 |0\,0\,0\rangle_2 \end{cases} \qquad E = \frac{4}{3}\hbar\omega + 2\hbar\omega = \frac{10}{3}\hbar\omega$

③ $\begin{cases} |0\,0\,0\rangle_1 |1\,0\,\pm 1\rangle_2 \\ |1\,0\,\pm 1\rangle_1 |0\,0\,0\rangle_2 \end{cases} \qquad E = \frac{4}{3}\hbar\omega + \frac{7}{3}\hbar\omega = \frac{11}{3}\hbar\omega$

Utilizzando Pauli

① $|000\rangle_1 |000\rangle_2 = |a\rangle \xrightarrow{spin} \times |S_{tot}=0 \ \ S_{tot,z}=0\rangle$

②

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_1 |010\rangle_2 + |010\rangle_2 |000\rangle_1\right) = |b\rangle \xrightarrow{spin} \times |S_{tot}=0 \ \ S_{tot,z}=0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_1 |010\rangle_2 - |010\rangle_2 |000\rangle_1\right) = |c\rangle \xrightarrow{spin} \times |S_{tot}=1, S_{tot,z}=\left\{\begin{smallmatrix}\pm 1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\rangle$

③

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_1 |110,\pm 1\rangle_2 + |110\pm 1\rangle_1 |000\rangle_2\right) = |d,\pm 1\rangle \xrightarrow{spin} \times |S_{tot}=0, S_{tot,z}=0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_1 |110\pm 1\rangle_2 - |110\pm 1\rangle_1 |000\rangle_2\right) = |e,\pm 1\rangle \xrightarrow{spin} \times |S_{tot}=1, S_{tot,z}=\left\{\begin{smallmatrix}\pm 1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}\rangle$

Livelli dell' Hamiltoniana completa

$|a\rangle|\overset{S_{tot}}{0} \ \overset{S_{tot,z}}{0}\rangle \longrightarrow E = \frac{8}{3}\hbar\omega$

$\left.\begin{array}{l} |b\rangle|0\ 0\rangle \longrightarrow E = \frac{10}{3}\hbar\omega \\ |c\rangle|1, S_z\rangle \longrightarrow E = \frac{10}{3}\hbar\omega \end{array}\right\}$ deg. 4

$\left.\begin{array}{l} |e,1\rangle|1\ -1\rangle \\ |e,-1\rangle|1\ 1\rangle \end{array}\right\}$ $E = \frac{11}{3}\hbar\omega - \hbar\alpha$ deg. 2

$\left.\begin{array}{l} |d,\pm 1\rangle|0\ 0\rangle \\ |e,\pm 1\rangle|1\ 0\rangle \end{array}\right\}$ $E = \frac{11}{3}\hbar\omega$ deg. 4

$\left.\begin{array}{l} |e\ 1\rangle|1\ 1\rangle \\ |e\ -1\rangle|1\ -1\rangle \end{array}\right\}$ $E = \frac{11}{3}\hbar\omega + \hbar\alpha$ deg. 2

Domanda b

Gli stati sono

$\psi = |e\ 1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\underset{S_{tot}}{1}, \underset{S_{tot,z}}{1}\rangle + e^{i\alpha}|1\ -1\rangle\right)$ α arbitraria

Domanda c)

$$S_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)|\psi\rangle$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|e\,1\rangle(1+e^{i\alpha})|1\,0\rangle$$

$$\langle\psi|S_x^2|\psi\rangle = |S_x|\psi\rangle|^2 = 0 \Longrightarrow \quad |1+e^{i\alpha}|^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pi$$

Quindi

$$\psi = |e\;1\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\rangle - |1\,-1\rangle\right)$$

Domanda d)

$$|S_x|\psi\rangle|^2 = 0 \Longrightarrow \quad S_x|\psi\rangle = 0$$

S_x assume il valore 0 con certezza

Esercizio 2

$$\psi = \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 \qquad \text{sottointeso } l_1 = l_2 = 1.$$

$$\underset{J_1}{\uparrow}\ \underset{J_{1z}}{\uparrow}\ \underset{J_2}{\uparrow}\ \underset{J_{2z}}{\uparrow}$$

a) Nella base $|J\ J_z\rangle_J$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\ 0\rangle_J - |1\ 0\rangle_J\right)$$

$$E_2 = \frac{3\hbar^2}{I} \qquad E_1 = \frac{\hbar^2}{I} \qquad \Delta E = \frac{2\hbar^2}{I} \qquad \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{2\hbar}{I}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_2 t/\hbar}|2,0\rangle_J - e^{-iE_1 t/\hbar}|1\ 0\rangle_J\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\Delta E t/\hbar}|2\ 0\rangle_J - |1\ 0\rangle_J\right) \quad \text{modulo fase}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}|2\ 0\rangle_J - |1\ 0\rangle_J\right)$$

b)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 - \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} - 1\right)\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} + 1\right)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$\text{prob} = \frac{1}{4}\left|e^{-i\omega t} - 1\right|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega t) \qquad J_{2z} = 1/2$$

$$\text{prob} = \frac{1}{4}\left|e^{i\omega t} + 1\right|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega t) \qquad J_{2z} = -1/2$$

c) $\omega t = 2\pi \qquad t_m = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi I}{\hbar}$

d)

$$\psi = \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left\{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\underset{l_{2z}}{0}\ \underset{S_{2z}}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle_2 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\underset{l_{2z}}{-1}\ \underset{S_{2z}}{\tfrac{1}{2}}\right\rangle_2\right\}$$

$$P\left(S_{2z} = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{3} \qquad P\left(S_{2z} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 16/02/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1 vincolata su una sfera (rotatore) descritta dalla seguente Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{J_x^2}{I_x} + \frac{J_y^2}{I_y} + \frac{J_z^2}{I_z}\right),$$

dove $\mathbf{J}$ è il momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, $I_x = I_y = I > 0$ e $0 < I_z < I$.
a) Si ottengano i livelli di energia corrispondenti agli stati $|\ell, s; j, j_z\rangle$.
b) Si scrivano gli autostati dell'Hamiltoniana corrispondenti al livello fondamentale e al primo livello in energia in termini degli autostati del momento angolare orbitale e dello spin e se ne discuta la degenerazione.
c) Si introduca una piccola asimmetria $|\varepsilon| \ll 1$ in modo che

$$I_x = I\,(1+\varepsilon)\,, \qquad I_y = I\,(1-\varepsilon)\,,$$

mentre I_z resta invariato. Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le energie degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed ai primi due livelli eccitati e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Esercizio 2. Si consideri un sistema unidimensionale costituito da due particelle, la cui Hamiltoniana è

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2 x_2^2}{2}\,,$$

con $m_2 > m_1$.
a) Determinare lo stato normalizzato $|\psi\rangle$ tale che:
i) una misura di energia fornisce con certezza il risultato $E = 2\hbar\omega$;
ii) il valor medio dell'operatore $\hat{O}_1 = \xi_1\xi_2$ è uguale a $1/3$, dove le variabili adimensionali ξ_i sono definite come $\xi_i = \sqrt{m_i\omega/\hbar}\,x_i$;
iii) il valor medio dell'operatore $\hat{O}_2 = \xi_1^2 - \xi_2^2$ è uguale a $-1/3$;
iv) il valor medio dell'operatore $\hat{O}_3 = \xi_1\pi_2$ è negativo, dove la variabile adimensionale π_2 è definita da $\pi_2 = p_2/\sqrt{\hbar m_2\omega}$.

Se consideri ora l'Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$, con $V = \lambda\hbar\omega\hat{O}_2$ e $\lambda > 0$.
b) Si dica per quali valori di λ l'energia dello stato fondamentale è limitata inferiormente; per tali valori si calcolino esattamente i livelli di $\mathcal{H}$.
c) Si utilizzi ora la teoria delle perturbazioni, assumendo $\lambda \ll 1$. Si applichi la teoria delle perturbazioni allo stato fondamentale ed al primo stato eccitato della Hamiltoniana imperturbata $\mathcal{H}_0$. Si calcolino le energie al primo ordine in λ, si discuta l'eventuale rimozione delle degenerazioni e si confronti il risultato ottenuto col risultato esatto.

Esercizio 1

$$H = \frac{1}{2I} J_x^2 + \frac{1}{2I} J_y^2 + \frac{1}{2I_z} J_z^2 =$$
$$= \frac{1}{2I} J^2 + \frac{1}{2I}\left(\frac{I}{I_z} - 1\right) J_z^2 = \frac{1}{2I}\left[J^2 + (\alpha-1) J_z^2 \right] \qquad \alpha = \frac{I}{I_z} > 1$$

(a)

$$E = \frac{\hbar^2}{2I}\left(j(j+1) + (\alpha-1) j_z^2 \right) \qquad j: 0, 1 \dots \text{ (interi)}$$
$$0 \leq |j_z| \leq j$$

(b)

- Lo stato fondamentale ha $j = j_z = 0$ $\quad l = 1$ $\qquad E = 0$
- Il primo stato eccitato ha $j = 1$, $j_z = 0$ $\qquad E = \frac{\hbar^2}{I}$

È degenere 3 volte, dato che l può assumere i valori 0, 1, 2

$$\overset{l\ s\ \ j\ \ j_z}{|1\ 1; 0\ \ 0\rangle} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{l_z\ s_z}{|1\ {-1}\rangle} - \frac{1}{\sqrt{3}} |0\ 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |{-1}\ 1\rangle \leftarrow \text{QUI } \underline{l = 1}$$

$$\begin{cases} |0\ 1; 1\ \ 0\rangle = \overset{l_z\ s_z}{|0\ 0\rangle} \leftarrow \text{QUI } l = 0 \\ |1\ 1; 1\ \ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\ {-1}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |{-1}, 1\rangle \leftarrow \text{QUI } l = 1 \\ |2\ 1; 1\ \ 0\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\, \underset{l_z\ s_z}{|1\ {-1}\rangle} - \sqrt{\frac{2}{5}}\, |0\ 0\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\, |{-1}\ 1\rangle \leftarrow \text{QUI } l = 2 \end{cases}$$

(c)

$$H = \frac{1}{2I}\frac{1}{1+\epsilon} J_x^2 + \frac{1}{2I}\frac{1}{1-\epsilon} J_y^2 + \frac{1}{2I_z} J_z^2 \approx$$
$$\approx H(\epsilon = 0) + \frac{1}{2I}\left(-J_x^2 + J_y^2\right)\epsilon + O(\epsilon^2)$$
$$= H(\epsilon=0) - \frac{1}{4I}\left(J_+^2 + J_-^2\right)\epsilon + O(\epsilon^2) = H + \Delta H \epsilon + O(\epsilon^2)$$

Dato che i primi due livelli hanno solo stati con $J_z = 0$, tutti gli elementi di matrice di ΔH sono nulli.

$\Delta E = 0$ per tutti gli stati

Il terzo livello dipende da α.
Se $\alpha > 5$ il terzo livello ha $j=2$, $j_z=0$, $\ell: 1,2,3$.
In questo caso gli elementi di matrice di ΔH sono tutti nulli e $\Delta E = 0$.
Se $\alpha < 5$ il terzo livello ha $j=1$, $j_z = \pm 1$, $\ell = 0,1,2$
Dato che $[\Delta H, L^2] = 0$, ℓ non gioca nessun ruolo e possiamo considerare la perturbazione in ogni sottospazio con ℓ fissato.
Consideriamo il sottospazio generato da

$$|\ell; 1; \underset{\uparrow_{J}}{1}\ \underset{\uparrow_{J_z}}{+1}\rangle = |+1\rangle \quad e \quad |\ell, 1; \underset{\uparrow_{J}}{1}\ \underset{\uparrow_{J_z}}{-1}\rangle = |-1\rangle$$

$$(J_+^2 + J_-^2)|+1\rangle = 2\hbar^2|-1\rangle \qquad (J_+^2 + J_-^2)|-1\rangle = 2\hbar^2|+1\rangle$$

$$\Delta H \ |+1\rangle = -\frac{\hbar^2}{2I}|-1\rangle \qquad \Delta H|-1\rangle = -\frac{\hbar^2}{2I}|+1\rangle$$

In forma matriciale

$$\Delta H = -\frac{\hbar^2}{2I}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta E = \pm \frac{\epsilon\hbar^2}{2I}$$

La degenerazione passa da 6 a 3 (2 livelli tre volte degeneri):

Esercizio 2
(a) In termini delle variabili adimensionali

$$a = \sqrt{\frac{2m}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\pi) \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i\pi) \qquad \pi = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$$

Se $|1\rangle = a^+|0\rangle$ calcoliamo

$$\langle 1|\xi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|a^+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 0|\xi^2|0\rangle = \left|\xi|0\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}a^+|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left||1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\langle 1|\xi^2|1\rangle = \left|\xi|1\rangle\right|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}aa^+\right)|0\rangle\right|^2$$

$$= \left||2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\right|^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\langle 0|\xi|0\rangle = \langle 1|\xi|1\rangle = 0 \qquad \langle 1|\xi^2|0\rangle = 0$$

Per i) lo stato $|\psi\rangle$ è dato da

$$|\psi\rangle = \alpha|\underset{n_1}{1}\ \underset{n_2}{0}\rangle + \beta|\underset{n_1}{0}\ \underset{n_2}{1}\rangle \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \quad \text{(normalizzazione)}$$

n_1 : livello per il I oscillatore armonico
n_2 : livello per il II oscillatore armonico
$$E = \hbar\omega(n_1+n_2+1)$$

ii)

$$\langle\psi|\xi_1\xi_2|\psi\rangle = \left(\alpha^*\langle 1\,0| + \beta^*\langle 0\,1|\right)\xi_1\xi_2\left(\alpha|1\,0\rangle + \beta|0\,1\rangle\right)$$

$$= |\alpha|^2\langle 1\,0|\xi_1\xi_2|1\,0\rangle + \longrightarrow \langle 1|\xi_1|1\rangle\langle 0|\xi_2|0\rangle = 0$$

$$|\beta|^2\langle 0\,1|\xi_1\xi_2|0\,1\rangle + \longrightarrow \langle 0|\xi_1|0\rangle\langle 1|\xi_2|1\rangle = 0$$

$$\alpha^*\beta\ \langle 1\,0|\xi_1\xi_2|0\,1\rangle + \longrightarrow \langle 1|\xi_1|0\rangle\langle 0|\xi_2|1\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\beta^*\alpha\ \langle 0\,1|\xi_1\xi_2|1\,0\rangle = \longrightarrow \langle 0|\xi_1|1\rangle\langle 1|\xi_2|0\rangle = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^*\beta + \beta^*\alpha) = \frac{1}{3}$$

iii)

$$\langle\psi|\xi_1^2-\xi_2^2|\psi\rangle = \left[\alpha^*\langle 1\,0| + \beta^*\langle 0\,1|\right](\xi_1^2-\xi_2^2)\left[\alpha|1\,0\rangle + \beta^{\text{NO}*}|0\,1\rangle\right]$$

$$= |\alpha|^2\langle 1\,0|\xi_1^2-\xi_2^2|1\,0\rangle + |\beta|^2\langle 0\,1|\xi_1^2-\xi_2^2|0\,1\rangle$$

$$+\ \alpha^*\beta\ \langle 1\,0|\xi_1^2-\xi_2^2|0\,1\rangle \longrightarrow \begin{cases}\langle 1|\xi^2|0\rangle\langle 0|1\rangle \\ -\langle 1|0\rangle\langle 0|\xi^2|1\rangle\end{cases} \longrightarrow 0$$

$$+\ \alpha\beta^*\ \langle 0\,1|\xi_1^2-\xi_2^2|1\,0\rangle \longrightarrow 0\ [\text{come sopra}]$$

$$= |\alpha|^2\left[\langle 1|\xi^2|1\rangle - \langle 0|\xi^2|0\rangle\right] + |\beta|^2\left[\langle 0|\xi^2|0\rangle - \langle 1|\xi^2|1\rangle\right]$$

$$= |\alpha|^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) + |\beta|^2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) = |\alpha|^2-|\beta|^2 = -\frac{1}{3}$$

Da i), ii), iii)

$$\begin{cases}|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \\ |\alpha|^2-|\beta|^2=-\frac{1}{3} \\ \alpha^*\beta+\beta^*\alpha = \frac{2}{3}\end{cases}$$

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{3} \qquad |\beta|^2 = \frac{2}{3} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\phi}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\phi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\phi} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,2\cos\phi = \frac{2}{3} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} \quad \text{oppure} \quad \phi = -\frac{\pi}{4}$$

Ora per un oscillatore armonico

$$\langle 1|\pi|0\rangle = \langle 1|\frac{i}{\sqrt{2}}a^{+}|0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad \langle 0|\pi|0\rangle = \langle 1|\pi|1\rangle = 0$$

$$\langle\psi|\xi_1\pi_2|\psi\rangle =$$

$$= \alpha^*\beta\,\langle 1\,0|\xi_1\pi_2|0\,1\rangle \longrightarrow \langle 1|\xi|0\rangle\langle 0|\pi|1\rangle = -\frac{i}{2}$$

$$\beta^*\alpha\,\langle 0\,1|\xi_1\pi_2|1\,0\rangle \longrightarrow \langle 0|\xi|1\rangle\langle 1|\pi|0\rangle = \frac{i}{2}$$

$$= -\frac{i}{2}\alpha^*\beta + \frac{i}{2}\beta^*\alpha$$

$$= \frac{i}{2}\alpha|\beta|\left(e^{-i\phi} - e^{i\phi}\right) = \alpha|\beta|\,\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \alpha|\beta|\sin\phi$$

Quindi $\sin\phi < 0 \Longrightarrow \phi = -\frac{3\pi}{4}$ (equiv. $\frac{5\pi}{4}$)

b)

$$\lambda\hbar\omega\,\hat{O}_2 = \lambda\hbar\omega\,\xi_1^2 - \lambda\hbar\omega\,\xi_2^2$$

$$= \lambda m_1\omega^2 x_1^2 - \lambda m_2\omega^2 x_2^2$$

Quindi

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1\omega^2}{2}(1+2\lambda)x_1^2 + \frac{m_2\omega^2}{2}(1-2\lambda)x_2^2$$

Per $\lambda > 0$ l'Hamiltoniana è limitata per $\lambda \le \frac{1}{2}$

Se $\Omega_1 = \omega\sqrt{1+2\lambda}$, $\Omega_2 = \omega\sqrt{1-2\lambda}$ lo spettro è

$$E = \hbar\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{2}$$

$$E = \hbar\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

(c) Spettro di H_0

fondam $\quad |0\;0\rangle$ (n_1 n_2) $\qquad E = \hbar\omega$

1° ecc. $\quad \begin{cases} |1\;0\rangle \\ |0\;1\rangle \end{cases} \qquad E = 2\hbar\omega$

Spettro di H (λ piccolo) dal risultato esatto

fond $|0\ 0\rangle$ ↑ autostati di H

$$2E = \hbar\Omega_1 + \hbar\Omega_2$$
$$2E = \hbar\omega\sqrt{1+2\lambda} + \hbar\omega\sqrt{1-2\lambda} =$$
$$2E = \hbar\omega(1+\lambda) + \hbar\omega(1-\lambda) = 2\hbar\omega + O(\lambda^2)$$
$$E = \hbar\omega + O(\lambda^2) \longrightarrow \Delta E = 0$$

1 ecc. $|0\ 1\rangle$

$$E = \frac{\hbar\Omega_1}{2} + \frac{3\hbar\Omega_2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+2\lambda} + \frac{3\hbar\omega}{2}\sqrt{1-2\lambda} =$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega(1+\lambda) + \frac{3}{2}\hbar\omega(1-\lambda)$$
$$= 2\hbar\omega - \lambda\hbar\omega + O(\lambda^2) \longrightarrow \Delta E = -\lambda\hbar\omega$$

autostato di H

2 ecc $|1\ 0\rangle$

$$E = \frac{3}{2}\hbar\Omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\Omega_2$$
$$= \frac{3}{2}\hbar\omega(1+\lambda) + \frac{1}{2}\hbar\omega(1-\lambda) =$$
$$= 2\hbar\omega + \lambda\hbar\omega + O(\lambda^2) \qquad \Delta E = +\lambda\hbar\omega$$

TEORIA PERTURBATIVA

⊙ ~~perturbazione sulla~~ stato fondamentale di $\mathcal{H}_0$

autostato di H_0

$$\langle 0\ 0|\lambda\hbar\omega(\xi_1^2 - \xi_2^2)|0\ 0\rangle =$$
$$= \lambda\hbar\omega\left(\langle 0|\xi^2|0\rangle - \langle 0|\xi^2|0\rangle\right) = 0$$

⊙ perturbazione sul I stato eccitato di $\mathcal{H}_0$

stato degenere con base $|0\ 1\rangle$ $|1\ 0\rangle$

autostati di H_0

$$\langle 0\ 1|\lambda\hbar\omega(\xi_1^2 - \xi_2^2)|0\ 1\rangle = \lambda\hbar\omega\big(\langle 0\ 1|\xi_1^2|0\ 1\rangle - \langle 0\ 1|\xi_2^2|0\ 1\rangle\big) =$$
$$= \lambda\hbar\omega\left(\langle 0|\xi^2|0\rangle - \langle 1|\xi^2|1\rangle\right) = -\lambda\hbar\omega$$

$$\langle 0\ 1|\lambda\hbar\omega(\xi_1^2 - \xi_2^2|1\ 0\rangle = \lambda\hbar\omega\big(\langle 0\ 1|\xi_1^2|1\ 0\rangle - \langle 0\ 1|\xi_2^2|1\ 0\rangle\big) = 0$$

$$\langle 1\ 0|\lambda\hbar\omega(\xi_1^2 - \xi_2^2|0\ 1\rangle = 0 \quad \text{(come sopra)}$$

$$\langle 1\ 0|\lambda\hbar\omega(\xi_1^2 - \xi_2^2|1\ 0\rangle = +\lambda\hbar\omega$$

Matrici di ΔH

$$\begin{pmatrix} -\lambda\hbar\omega & 0 \\ 0 & \lambda\hbar\omega \end{pmatrix} \longrightarrow \qquad \Delta E = \pm\lambda\hbar\omega$$

NOTA: lo stato $|\psi\rangle$ è stato definito utilizzando gli operatori a^+:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a_1^+ |0\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\pi/4}\, a_2^+ |0\,0\rangle$$

Se si utilizza $\eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi + i\xi)$, $\eta^+ = i a^+$;

$$\psi' = i\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\, i a_1^+ |0\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\pi/4}\, i a_2^+ |0\,0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, \eta_1^+ |0\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\pi/4}\, \eta_2^+ |0\,0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, |1\,0\rangle_\eta + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\pi/4}\, |0\,1\rangle_\eta$$

dove $|n_1\, n_2\rangle_\eta$ sono definiti con η^+

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 25/05/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 e massa m soggetta alla Hamiltoniana unidimensionale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \omega S_z$$

Siano $|n\rangle$ gli autostati normalizzati dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico e $\chi_\pm$ gli spinori normalizzati relativi ad S_z, $S_z\chi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm$.

a) Si calcoli lo spettro della Hamiltoniana (inclusa la degenerazione).

b) Si consideri lo stato normalizzato

$$|\psi_0\rangle = c\left(|0\rangle\chi_- + \sqrt{3}|1\rangle\chi_+\right).$$

Si calcoli la costante c e l'evoluto temporale $|\psi, t\rangle$ di $|\psi_0\rangle$.

c) E' dato un operatore A che opera solo sulla parte spaziale tale che $A|n\rangle = |n\rangle$ per $n > 2$ e

$$A|0\rangle = i|1\rangle, \qquad A|1\rangle = -i|0\rangle + \sqrt{3}|2\rangle, \qquad A|2\rangle = \sqrt{3}|1\rangle.$$

Si calcolino $A^\dagger|0\rangle$ e $A^\dagger|1\rangle$, dove $A^\dagger$ è l'aggiunto di A, e l'elemento di matrice $\langle\psi, t|AS_x|\psi, t\rangle$.

d) Se si fa una misura di A su $|\psi, t\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin $S = \hbar/2$ e massa m vincolata a muoversi su una sfera. La sua Hamiltoniana è data da ($q > 0$)

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I} - \frac{qB}{2mc}\left(L_z + 2\,S_z\right).$$

a) Si calcolino gli autovalori di H e le relative degenerazioni. Si assuma $\hbar^2/(2I) \gg qB\hbar/(mc)$

b) Si determinino tutti gli stati $|\psi_0\rangle$ tali che: i) una misura di j^2 del momento angolare totale $\mathbf{J} = \hbar\mathbf{j} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ dà rispettivamente 15/4 con probabilità 1/3 e 3/4 con probabilità 2/3; ii) una misura di L^2 dà sempre come risultato $2\hbar^2$; iii) una misura di j_z dà sempre come risultato 1/2. Si calcoli inoltre il valore medio dell'Hamiltoniana su tali stati.

c) Si calcoli l'evoluto $|\psi_t\rangle$ degli stati $|\psi_0\rangle$: $|\psi_{t=0}\rangle = |\psi_0\rangle$.

d) Si fissi lo stato $|\psi_0\rangle$, richiedendo che il valor medio $\langle\psi_0|\cos^2\theta|\psi_0\rangle$ sia massimo. Per tale stato si calcoli $\langle\psi_t|\cos^2\theta|\psi_t\rangle$.

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 25/05/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 e massa m soggetta alla Hamiltoniana unidimensionale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \omega S_z$$

Siano $|n\rangle$ gli autostati normalizzati dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico e $\chi_\pm$ gli spinori normalizzati relativi ad S_z, $S_z\chi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm$.

a) Si calcoli lo spettro della Hamiltoniana (inclusa la degenerazione).

b) Si consideri lo stato normalizzato

$$|\psi_0\rangle = c\left(|0\rangle\chi_- + \sqrt{3}|1\rangle\chi_+\right).$$

Si calcoli la costante c e l'evoluto temporale $|\psi, t\rangle$ di $|\psi_0\rangle$.

c) E' dato un operatore A che opera solo sulla parte spaziale tale che $A|n\rangle = |n\rangle$ per $n > 2$ e

$$A|0\rangle = i|1\rangle, \qquad A|1\rangle = -i|0\rangle + \sqrt{3}|2\rangle, \qquad A|2\rangle = \sqrt{3}|1\rangle.$$

Si calcolino $A^\dagger|0\rangle$ e $A^\dagger|1\rangle$, dove $A^\dagger$ è l'aggiunto di A, e l'elemento di matrice $\langle\psi, t|AS_x|\psi, t\rangle$.

d) Se si fa una misura di A su $|\psi, t\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin $S = \hbar/2$ e massa m vincolata a muoversi su una sfera. La sua Hamiltoniana è data da ($q > 0$)

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I} - \frac{qB}{2mc}\left(L_z + 2\,S_z\right).$$

a) Si calcolino gli autovalori di H e le relative degenerazioni. Si assuma $\hbar^2/(2I) \gg qB\hbar/(mc)$

b) Si determinino tutti gli stati $|\psi_0\rangle$ tali che: i) una misura di j^2 del momento angolare totale $\mathbf{J} = \hbar\mathbf{j} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ dà rispettivamente 15/4 con probabilità 1/3 e 3/4 con probabilità 2/3; ii) una misura di L^2 dà sempre come risultato $2\hbar^2$; iii) una misura di j_z dà sempre come risultato 1/2. Si calcoli inoltre il valore medio dell'Hamiltoniana su tali stati.

c) Si calcoli l'evoluto $|\psi_t\rangle$ degli stati $|\psi_0\rangle$: $|\psi_{t=0}\rangle = |\psi_0\rangle$.

d) Si fissi lo stato $|\psi_0\rangle$, richiedendo che il valor medio $\langle\psi_0|\cos^2\theta|\psi_0\rangle$ sia massimo. Per tale stato si calcoli $\langle\psi_t|\cos^2\theta|\psi_t\rangle$.

Esercizio 1 MAGGIO 2018 ①

a) Le autofunzioni sono $|n\rangle\chi_\pm$ con $E=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})\pm\frac{\hbar\omega}{2}$

Lo stato fondamentale ha $E=0$, $|0\rangle\chi_-$, non degenere

I livelli successivi hanno $E_k = k\hbar\omega$ $k=1,2,\dots$

e sono 2 volte degeneri (autostati $|k\rangle\chi_-$ e $|k-1\rangle\chi_+$)

b) $c=1/2$ $H|0\rangle\chi_- = 0$ $H|1\rangle\chi_+ = 2\hbar\omega$

$$|\psi,t\rangle = \frac{1}{2}\left[|0\rangle\chi_- + \sqrt{3}\,e^{-2i\omega t}|1\rangle\chi_+\right]$$

c) $A^+|0\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|A^+|0\rangle = \sum_n |n\rangle\langle 0|A|n\rangle^* = |1\rangle\langle 0|A|1\rangle^* = i|1\rangle$

$A^+|1\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|A^+|1\rangle = \sum_n |n\rangle\langle 1|A|n\rangle^* =$

$= |0\rangle\langle 1|A|0\rangle^* + |2\rangle\langle 1|A|2\rangle^* = -i|0\rangle + \sqrt{3}|2\rangle$

A è autoaggiunto (vale $A^+|n\rangle = A|n\rangle$ per ogni n)

Dato che $S_x|\pm\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma_x|\pm\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mp\frac{1}{2}\rangle$

$$S_x|\psi\, t\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}|0\rangle\chi_+ + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2i\omega t}|1\rangle\chi_-\right]$$

$$AS_x|\psi,t\rangle = \frac{\hbar}{4}\left[i|1\rangle\chi_+ + \sqrt{3}\,e^{-2i\omega t}(-i|0\rangle + \sqrt{3}|2\rangle)\chi_-\right]$$

$$\langle\psi\, t|AS_x|\psi\, t\rangle = \frac{\hbar}{8}\left[\sqrt{3}\,e^{-2i\omega t}(-i) + \sqrt{3}\,e^{2i\omega t}\,i\right]$$

$$= \frac{\hbar}{8}\sqrt{3}\,i\,(e^{2i\omega t} - e^{-2i\omega t}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\hbar\sin 2\omega t$$

d) Il sottospazio generato dalle combinazioni lineari di $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ è invariante per A. Se $|0\rangle = (1,0,0)$, $|1\rangle = (0,1,0)$, $|2\rangle = (0,0,1)$, l'operatore A si può scrivere come matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2-4)$$

$$\lambda = 0, \pm 2$$

Autovettori di A

$\lambda = 0 \qquad v_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{i}{2}\right)$

$\lambda = 2 \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\lambda = -2 \qquad v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

In questa base

$|\psi t\rangle = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)\chi_- + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2i\omega t}, 0\right)\chi_+$

$P(0) = |\langle v_0 \chi_+ | \psi(t)\rangle|^2 + |\langle v_0 \chi_- | \psi(t)\rangle|^2$

$= \quad 0 \quad + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$

$P(2) = |\langle v_2 \chi_+ | \psi t\rangle|^2 + |\langle v_2 \chi_- | \psi(t)\rangle|^2 =$

$= \quad \frac{3}{8} \quad + \quad \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$

$P(-2) = |\langle v_{-2}\chi_+ | \psi t\rangle|^2 + |\langle v_{-2}\chi_- | \psi t\rangle|^2 = \frac{13}{32}$

Esercizio 2

a) Definiamo $\alpha = \frac{\hbar^2}{2I}$, $\beta = \frac{\hbar q B}{2mc}$

Gli autostati sono $|\ell m\rangle \chi_\pm$ con $E = \alpha \ell(\ell+1) - \beta(m \pm 1)$

Stati più bassi

$\ell = 0 \begin{cases} |00\rangle\chi_+ & E = -\beta \\ |00\rangle\chi_- & E = \beta \end{cases}$ non degeneri

$\ell = 1 \begin{cases} |11\rangle\chi_+ & E = 2\alpha - 2\beta & \text{non deg.} \\ |10\rangle\chi_+ & E = 2\alpha - \beta & \text{non deg.} \\ \left.\begin{matrix}|1-1\rangle\chi_+ \\ |11\rangle\chi_-\end{matrix}\right\} & E = 2\alpha & \text{2 volte degenere} \\ |10\rangle\chi_- & E = 2\alpha + \beta & \text{non deg.} \\ |1-1\rangle\chi_- & E = 2\alpha + 2\beta & \text{non degenere} \end{cases}$

③

In generale, i livelli con momento angolare l hanno energie $E_k = l(l+1)\alpha + k\beta \qquad k = -(l+1) \dots (l+1)$

Gli stati con $k = -(l+1), -l, l, (l+1)$ sono non degeneri

Gli stati con $k = -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1$ sono 2 volte degeneri

b) Siano $|l, s; J J_z\rangle$ gli autostati di L^2, S^2, J^2, J_z

Quindi

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} |1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2} \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{i\gamma} |1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2}\rangle \quad \gamma \text{ arbitrario}$$

Dato che L, S sono fissi, semplifichiamo la notazione

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} |\tfrac{3}{2} \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{i\gamma} |\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2}\rangle_J$$

Nella base $|L L_z, S S_z\rangle = |L_z S_z\rangle_{LS}$ si ha

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} |1 -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \sqrt{\tfrac{2}{3}} |0 \tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \right]$$
$$+ \sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{i\gamma} \left[\sqrt{\tfrac{2}{3}} |1 -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \right]$$
$$= \frac{1}{3}(1 + 2e^{i\gamma}) |1 -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - e^{i\gamma}) |0 \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

Ora $\quad H = \frac{\alpha}{\hbar^2} L^2 + \frac{\beta}{\hbar}(L_z + 2S_z) = \frac{\alpha}{\hbar^2} L^2 + \frac{2\beta}{\hbar} J_z - \frac{\beta}{\hbar} L_z$

$$H|\psi_0\rangle = (2\alpha + \beta)|\psi_0\rangle - \frac{\beta}{\hbar} L_z |\psi_0\rangle$$
$$= (2\alpha + \beta)|\psi_0\rangle - \beta \frac{1}{3}(1 + 2e^{i\gamma}) |1 -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$\langle\psi_0|H|\psi_0\rangle = 2\alpha + \beta - \frac{\beta}{9} |1 + 2e^{i\gamma}|^2$$
$$= 2\alpha + \beta - \frac{1}{9}\beta(5 + 4\cos\gamma) = 2\alpha - \frac{4}{9}(1 - \cos\gamma)\beta$$

c)

$$|\psi\, t\rangle = \frac{1}{3}(1 + 2e^{i\gamma}) |1 -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - e^{i\gamma}) e^{i\beta t/\hbar} |0 \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

d) $\langle \psi_0 | \cos^2\theta | \psi_0 \rangle = \frac{1}{9} |1+2e^{i\gamma}|^2 \langle \ell_z = 1 | \cos^2\theta | \ell_z = 1 \rangle$

$+ \frac{2}{9} |1 - e^{i\gamma}|^2 \langle \ell_z = 0 | \cos^2\theta | \ell_z = 0 \rangle$

$= \frac{1}{9} (5 + 4\cos\gamma) \langle 1 | \cos^2\theta | 1 \rangle + \frac{4}{9} (1 - \cos\gamma) \langle 0 | \cos^2\theta | 0 \rangle$

Ora

$|\ell_z = 1\rangle = Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\phi} \qquad |\ell_z = 0\rangle = Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$\langle 1 | \cos^2\theta | 1 \rangle = \frac{3}{8\pi} \int d\Omega \cos^2\theta \sin^2\theta =$

$= \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$

$\langle 0 | \cos^2\theta | 0 \rangle = \frac{3}{4\pi} \int d\Omega \cos^4\theta = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos^4\theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Quindi

$\langle \psi_0 | \cos^2\theta | \psi_0 \rangle = \frac{1}{9} (5 + 4\cos\gamma) \frac{1}{5} + \frac{4}{9} (1 - \cos\gamma) \frac{3}{5}$

$= \frac{1}{45} (17 - 8\cos\gamma)$

Il massimo corrisponde a $\cos\gamma = -1$, $\gamma = \pi$, $e^{i\gamma} = -1$

$|\psi, t\rangle = -\frac{1}{3} |1\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{i\beta t/\hbar} |0\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$

L'elemento di matrice non dipende da t

$\langle \psi\, t | \cos^2\theta | \psi\, t \rangle = \langle \psi_0 | \cos^2\theta | \psi_0 \rangle = \frac{5}{9}$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 25/06/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 con Hamiltoniana

$$H = \frac{\mu_0 B}{\hbar} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}$$

dove $\boldsymbol{n} = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ è un versore dato (α è dato) ed $\boldsymbol{S}$ l'operatore di spin. Si consideri solo l'evoluzione dello spin. Al tempo $t = 0$, la particella si trova in uno stato $|\chi(t = 0)\rangle$ con $S_z|\chi(t = 0)\rangle = \frac{\hbar}{2}|\chi(t = 0)\rangle$.

a) Se al tempo $t = 0$ si misura $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

b) Si calcoli l'evoluto $\chi(t)$ al variare di t e l'elemento di matrice $\langle\chi(t)|S_y|\chi(t)\rangle$.

c) All'istante $t = T$ viene fatta una misura di S_z. Si specifichi quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità. Se al tempo $t = T$ la misura dà come risultato $\hbar/2$, quali valori possono essere osservati in una seconda misura di S_z al tempo $t = 2T$ e con quali probabilità?

Esercizio 2. Siano date due particelle identiche di spin 1/2. Nel sistema del centro di massa la funzione d'onda ha la forma seguente

$$\psi(\boldsymbol{r}) = Ay\, f(r)\chi\,,$$

dove $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e χ rappresenta la funzione d'onda di spin dei due fermioni; la funzione d'onda radiale $f(r)$ è normalizzata in modo che sia

$$\int_0^\infty dr\, r^4 |f(r)|^2 = 1\,;$$

la funzione χ è un'autofunzione normalizzata dello spin totale $\boldsymbol{S}$ lungo l'asse z con autovalore zero, ovvero $S_z\chi = 0$.

a) Si determini la costante A in modo che la norma di ψ sia uguale a uno e si calcoli $S^2\chi$.

b) Se $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare totale nel sistema del centro di massa, si calcolino i possibili risultati di una misura di L^2 ed L_z su ψ e le rispettive probabilità.

c) Se $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, si calcolino i possibili risultati di una misura di J^2 e J_z su ψ e le rispettive probabilità.

d) L'Hamiltoniana ha la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{\alpha}{\hbar} \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}\,,$$

dove $\mathcal{H}_0$ è indipendente dallo spin e relativa ad un potenziale centrale; α è una costante. Se $\mathcal{H}_0\psi(\boldsymbol{r}) = E_0\psi(\boldsymbol{r})$, si determini l'evoluzione temporale dello stato ψ. Sia $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ l'evoluto temporale.

e) Si calcolino i possibili valori di una misura di L_z su $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ e le relative probabilità in funzione del tempo. A quali istanti la probabilità di ottenere $L_z = 0$ è massima?

Esercizio 1 25/06/2018 1

a) In forma matriciale nella base in cui S_z è diagonale

$$H = \frac{1}{2}\mu_0 B \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Autovalori della matrice

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

(ovvio, è la componente di $\vec{S}$ lungo l'asse $\hat{n}$)

Autovettori

$\lambda = 1 \qquad v_1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$\lambda = -1 \qquad v_{-1} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}, -\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle v_1 \cdot \chi \rangle|^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle v_{-1} \cdot \chi \rangle|^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \qquad \chi = (1,0)$$

(b) $$\chi = v_1 \langle v_1 \cdot \chi \rangle + v_{-1}\langle v_{-1} \cdot \chi \rangle = \cos\frac{\alpha}{2} v_1 + \sin\frac{\alpha}{2} v_{-1}$$

$$\chi(t) = \cos\frac{\alpha}{2} e^{-itE_1/\hbar} v_1 + \sin\frac{\alpha}{2} e^{-itE_{-1}/\hbar} v_{-1}$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} e^{-i\omega t} v_1 + \sin\frac{\alpha}{2} e^{i\omega t} v_{-1}$$

$$= (\cos\omega t - i\cos\alpha\sin\omega t, -i\sin\alpha\sin\omega t)$$

$E_1 = \frac{\mu_0 B}{2}$

$E_{-1} = -\frac{\mu_0 B}{2}$

$\omega = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 B}{\hbar}$

$$\langle \chi(t) | S_y | \chi(t) \rangle = -\hbar \sin\alpha \cos\omega t \sin\omega t$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin\alpha \sin 2\omega t$$

$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

(c)

$$P\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = |(1,0)\cdot\chi(t)|^2 = \cos^2\omega t + \cos^2\alpha \sin^2\omega t = 1 - \sin^2\alpha \sin^2\omega t$$

$$P\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) |(0,1)\cdot\chi(t)|^2 = \sin^2\alpha \sin^2\omega t$$

Al tempo T basta porre $t = T$

Al tempo 2T tutto è identico

Esercizio 2

(a)
$$\psi = A\left(\frac{x+iy}{r} - \frac{x-iy}{r}\right)\frac{1}{2i}\, r f(r)\chi$$
$$= \frac{A}{2i}\left(e^{i\phi}\sin\theta - e^{-i\phi}\sin\theta\right) r f(r)\chi$$
$$= \frac{A}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-Y_1^1 - Y_1^{-1}\right) r f(r)\chi$$
$$= \frac{iA}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right) r f(r)\chi$$

Calcolo di A $\quad \frac{|A|^2}{4}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot 2 = 1 \quad |A|\cdot\frac{4\pi}{3} = 1 \quad |A| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$

Calcolo di $S^2\chi$. La funzione d'onda spaziale è dispari sotto scambio $\vec{r}\to-\vec{r}$. Quindi χ è pari per il principio di Pauli. Si tratta quindi di uno stato di spin 1. $S^2\chi = 2\hbar^2\chi$.

(b) Il momento angolare totale vale 1. Possiamo quindi riscrivere ψ come $(A = -i|A|)$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\underset{L}{1}\ \underset{L_z}{1}\rangle_L + |\underset{L}{1}\ \underset{L_z}{-1}\rangle\Big)|\underset{S}{1}\ \underset{S_z}{0}\rangle_S\, |\overset{\text{radiale}}{\text{spaziale}}\rangle \quad \text{spaziale}\to r f(r)$$

La parte radiale è normalizzata e non gioca nessun ruolo nel problema. $L=1$ e $S=1$. Quindi possiamo semplificare la notazione scrivendo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\underset{L}{1}\ \underset{S}{1};\ \underset{L_z}{1}\ \underset{S_z}{0}\rangle + |\underset{L}{1}\ \underset{S}{1};\ \underset{L_z}{-1}\ \underset{S_z}{0}\rangle\Big) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_{LS} + |-1\,0\rangle_{LS}\right)$$

Quindi L^2 assume il valore $2\hbar^2$ con probabilità 1

L_z assume il valore $\begin{cases} +\hbar & 1/2 \\ -\hbar & 1/2 \end{cases}$

c) Se $|J\, J_z\rangle_J$ è la base con diagonali L^2, S^2, J^2, J_z ③

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|2\ 1\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ 1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|2\ {-1}\rangle_J - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ {-1}\rangle_J\right]$$

Quindi
$$J^2 \begin{cases} 6\hbar^2 & \text{con probabilità } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \\ 2\hbar^2 & \text{con probabilità } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$J_z \begin{cases} \hbar & \text{con probabilità } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \\ -\hbar & \text{con probabilità } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

d)
$$\mathcal{H} = H_0 + \frac{\alpha}{2\hbar^2}(J^2 - L^2 - S^2) = H_0 + \frac{\alpha}{2\hbar^2}(J^2 - 2\hbar^2 - 2\hbar^2)$$
$$= \underbrace{H_0 - 2\alpha}_{} + \frac{\alpha}{2\hbar^2}J^2$$

contribuisce una fase globale all'evoluzione che non includiamo

$$\psi(t) = \frac{1}{2}e^{-iHt/\hbar}\left(|2\ 1\rangle_J + |2\ {-1}\rangle_J\right)$$
$$+\frac{1}{2}e^{-iHt/\hbar}\left(|1\ 1\rangle_J - |1\ {-1}\rangle_J\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-3i\alpha t}\left(|2\ 1\rangle_J + |2\ {-1}\rangle_J\right)$$
$$\frac{1}{2}e^{-i\alpha t}\left(|1\ 1\rangle_J - |1\ {-1}\rangle_J\right) \quad = (\text{modulo fase})$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2i\alpha t}\left(|2\,1\rangle_J + |2\,{-1}\rangle_J\right) + \frac{1}{2}\left(|1\ 1\rangle_J - |1\ {-1}\rangle_J\right)$$

e)

$$\psi(t) = \frac{1}{2} e^{-2i\alpha t} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |1\,0\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\,1\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\,-1\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\,0\rangle_{LS} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |1\,0\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\,1\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\,-1\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\,0\rangle_{LS} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + e^{-2i\alpha t}) |1\,0\rangle_{LS} - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - e^{-2i\alpha t}) |0\,1\rangle_{LS}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - e^{-2i\alpha t}) |0\,-1\rangle_{LS} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + e^{-2i\alpha t}) |-1\,0\rangle_{LS}$$

$$P(L_z = \hbar) = \frac{1}{8} |1 + e^{-2i\alpha t}|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\alpha t) = \frac{\cos^2 \alpha t}{2}$$

$$P(L_z = 0) = 2 \cdot \frac{1}{8} |1 - e^{-2i\alpha t}|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha t) = \sin^2 \alpha t$$

$$P(L_z = -\hbar) = \frac{1}{8} |1 + e^{-2i\alpha t}|^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\alpha t) = \frac{\cos^2 \alpha t}{2}$$

Massimo di $P(L_z = 0)$ per $\cos 2\alpha t = -1$

$$2\alpha t = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{2\alpha} (1 + 2k)$$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 10/07/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1 vincolata a muoversi su una sfera di raggio r. La sua funzione d'onda è

$$\psi = A\left[\frac{z}{r}(\chi_1 + \chi_{-1}) + ia\chi_0\right]$$

dove χ_m sono gli spinori normalizzati relativi a S_z, ossia $S_z\chi_m = \hbar m\chi_m$ e a è una costante reale positiva.

a) Si calcolino le costanti A e a richiedendo che ψ sia normalizzata e che $\langle\psi|L^2|\psi\rangle = \hbar^2$, dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare.

b) In una misura su ψ di L^2, L_z, e S_z, quali valori possono essere ottenuti? E con quali probabilità?

c) Si calcoli l'elemento di matrice $\langle\psi|\cos^2\theta|\psi\rangle$.

d) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = \frac{\alpha}{\hbar}(J^2 + L^2)$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$. Quali valori di J_z ed L_z possono essere misurati al tempo t e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si consideri un sistema a tre livelli e quattro operatori $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots 4$. In una base ortonormale essi hanno la seguente rappresentazione matriciale:

$$\mathcal{A}_1 = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & i & 1\end{pmatrix}; \qquad \mathcal{A}_2 = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{A}_3 = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}; \qquad \mathcal{A}_4 = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1\end{pmatrix},$$

a) Si dica quali di essi possono essere delle osservabili fisiche.

Si indichi con $\mathcal{H}$ la prima (nell'ordinamento definito dall'indice i) delle possibili osservabili di cui al punto 1 e con $\hat{O}$ la seconda (nello stesso ordinamento) possibile osservabile. Per esempio, se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ possono essere entrambe osservabili, si ponga $\mathcal{H} = \mathcal{A}_1$ e $\hat{O} = \mathcal{A}_2$; se invece, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_3$ possono essere osservabili, ma $\mathcal{A}_2$ non lo può essere, sarà allora $\mathcal{H} = \mathcal{A}_1$ e $\hat{O} = \mathcal{A}_3$; se invece $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ possono essere osservabili, ma non lo può essere $\mathcal{A}_1$, porremo invece $\mathcal{H} = \mathcal{A}_2$ e $\hat{O} = \mathcal{A}_3$; se $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_4$ sono possibili osservabili, mentre non lo sono $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_3$, allora $\mathcal{H} = \mathcal{A}_2$ e $\hat{O} = \mathcal{A}_4$; si proceda nello stesso modo in tutti gli altri casi.

b) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nell'autostato di $\hat{O}$ corrispondente al minimo autovalore. Si determini tale stato, indicandolo con $|\psi\rangle_{t=0}$.

c) Se $\mathcal{H}$ rappresenta l'Hamiltoniana del sistema, si calcoli l'evoluto temporale $|\psi\rangle_t$.

d) Si calcoli ${}_t\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_t$ all'istante $t = \pi/(2\omega)$. Si spieghi perché ci si aspetta a priori che ${}_t\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_t$ vari nel tempo.

e) Si dimostri che tutti i valori medi di $\hat{O}$ sono non negativi. Utilizzando questo risultato, si trovi il minimo tempo t al quale il valor medio di $\hat{O}$ su $|\psi\rangle_t$ è uguale a quello iniziale ($t = 0$).

Esercizio 1 ①

(a)

$$\psi = A\left[\cos\theta(\chi_1+\chi_{-1}) + ia\,\chi_0\right]$$

$$= A\left[\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0(\chi_1+\chi_{-1}) + ia\sqrt{4\pi}\,Y_0^0\chi_0\right]$$

normalizzazione: $|A|^2\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+a^2\cdot 4\pi\right]=1$

$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = \hbar^2$ $\quad 2\hbar^2|A|^2\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right]=\hbar^2$

Quindi $|A|=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}$ $\quad a=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\psi = \frac{1}{2}Y_1^0(\chi_1+\chi_{-1}) + \frac{i}{\sqrt{2}}Y_0^0\chi_0$$ avendo scelto $A=|A|$

(b)

$$L^2 = \begin{cases} 0 & \text{prob } 1/2 \\ 2\hbar^2 & \text{prob } 1/2 \end{cases}$$

$L_z = 0$ prob. 1

$$S_z = \begin{cases} \hbar & \text{prob } 1/4 \\ 0 & \text{prob } 1/2 \\ -\hbar & \text{prob } 1/4 \end{cases}$$

(c) Se ~~uno~~ $|l\,m\rangle_L = Y_l^m$ integrando sullo spin

$$\langle\psi|\cos^2\theta|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,{}_L\langle 1\,0|\cos^2\theta|1\,0\rangle_L + \frac{1}{2}\,{}_L\langle 0\,0|\cos^2\theta|0\,0\rangle_L$$

$${}_L\langle 1\,0|\cos^2\theta|1\,0\rangle_L = \int d\Omega\,\frac{3}{4\pi}\cos^4\theta = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,\cos^4\theta =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\langle 0\,0|\cos^2\theta|0\,0\rangle = \int d\Omega\,\frac{1}{4\pi}\cos^2\theta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,\cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\langle\psi|\cos^2\theta|\psi\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

d) $\psi = \frac{1}{2}|10\rangle(\chi_1 + \chi_{-1}) + \frac{i}{\sqrt{2}}|00\rangle\chi_0$

Se $|L\,S;\,J\,J_z\rangle_J$ è la nuova base

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1;\,2\,1\rangle_J - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1;\,1\,1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1;\,2\,-1\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1;\,1\,-1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}|0\,1;\,1\,0\rangle_J$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[|1\,1;\,2\,1\rangle_J + |1\,1;\,2\,-1\rangle_J\right] \rightarrow E = 8\hbar\alpha$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\left[-|1\,1;\,1\,1\rangle_J + |1\,1;\,1\,-1\rangle_J\right]}_{E = 4\hbar\alpha} + \frac{i}{\sqrt{2}}\underbrace{|0\,1;\,1\,0\rangle_J}_{E = 2\hbar\alpha}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-8i\alpha t}\left[|1\,1;\,2\,1\rangle_J + |1\,1;\,2\,-1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-4i\alpha t}\left[-|1\,1;\,1\,1\rangle_J + |1\,1;\,1\,-1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-2i\alpha t}|0\,1;\,1\,0\rangle_J$$

$$J_z = \begin{cases} \hbar & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -\hbar & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

indipendenti da t dato che $[J_z, H] = 0$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-4i\alpha t}\left[|1\,1;\,2\,1\rangle_J + |1\,1;\,2\,-1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-|1\,1;\,1\,1\rangle_J + |1\,1;\,1\,-1\rangle_J\right]$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}e^{2i\alpha t}|0\,1;\,1\,0\rangle_J$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-4i\alpha t}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle_L \chi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \chi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle_L \chi_{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}|1-1\rangle \chi_0\Big]$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[-\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle_L \chi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \chi_1\Big]$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle_L \chi_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}|1-1\rangle \chi_0\Big]$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{2i\alpha t} |00\rangle_L \chi_0$$

$$\text{Prob}(L_z = \hbar) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 |e^{-4i\alpha t} - 1|^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha t)$$

$$\text{Prob}(L_z = -\hbar) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 |e^{-4i\alpha t} - 1|^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha t)$$

$$\text{Prob}(L_z = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 |e^{-4i\alpha t} + 1|^2 \cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\alpha t$$

Esercizio 2:

(a) $\mathcal{H} = A_1$, $\hat{O} = A_4$

b) Autovalori di $\hat{O}$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Autov $= \begin{cases} 0 \\ \hbar\omega \\ 2\hbar\omega \end{cases}$

$$\psi = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \hat{O}\psi = 0$$

c)

Autovalori di H

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -i \\ i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2)$$

Autoval $H = \begin{cases} 0 \\ \hbar\omega \\ 2\hbar\omega \end{cases}$

$|0\rangle_H = \left(0, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$|\hbar\omega\rangle_H = (1, 0, 0)$

$|2\hbar\omega\rangle_H = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

${}_H\langle 2\hbar\omega|\psi\rangle = \frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

${}_H\langle \hbar\omega|\psi\rangle = \frac{i}{2}$

${}_H\langle 0|\psi\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{2}}$

$|\psi\rangle = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)|2\hbar\omega\rangle_H + \frac{i}{2}|\hbar\omega\rangle_H + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\right)|0\rangle_H$

$|\psi\rangle_t = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)e^{-2i\omega t}|2\hbar\omega\rangle_H + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}|\hbar\omega\rangle_H + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\right)|0\rangle_H$

d) Per $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $e^{-2i\omega t} = -1$, $e^{-i\omega t} = -i$

$|\psi\rangle_t = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{2}\right)$

$${}_t\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_t = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/\sqrt{2} \\ i/2 \end{pmatrix} \times \hbar\omega$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{2}} i \\ i - \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\hbar\omega$$

${}_t\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_t$ dipende da t poichè ψ non è autovettore di H atteso dato che $[H, \hat{O}] \neq 0$

e) Se w_0, w_1, w_2 sono autostati di $\hat{O}$ con autovalore $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega$ e $|\phi\rangle$ è uno stato generico 5

$$\langle\phi|\hat{O}|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{2} |\langle w_n|\phi\rangle|^2 n\hbar\omega \geq 0$$ per la completezza

Vogliamo calcolare t tale che

$${}_t\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_t = {}_{t=0}\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_{t=0} = 0$$

Dalla relazione di sopra segue $\langle w_1|\psi\rangle_t = \langle w_2|\psi\rangle_t = 0$

Quindi $|\psi_t\rangle = \alpha|\psi\rangle_0$ dato che $|\psi\rangle_0 = w_0$

dove α è una fase.

Si deve avere

$$\begin{cases} e^{-2i\omega t} = \alpha \\ e^{-i\omega t} = \alpha \\ 1 = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \quad t = \frac{2\pi}{\omega}$$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 17/09/2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi in due dimensioni e soggetta alla Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \omega S_x$$

a) Si calcolino tutti i livelli energetici con la relativa degenerazione per energie $E \leq 3\hbar\omega$.

b) Si consideri la funzione d'onda normalizzata

$$\psi = A\psi_0(x)\left[\psi_0(y) + \alpha e^{i\phi}\psi_1(y)\right]\chi_+$$

dove $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni normalizzate dell'oscillatore armonico unidimensionale con energia $\hbar\omega(n + 1/2)$, χ_+ è uno spinore normalizzato, autofunzione di S_z con autovalore $\hbar/2$, A e α sono costanti positive.

Si calcolino A ed α richiedendo che ψ sia normalizzata e che la probabilità di misurare $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ su ψ sia 1/4.

c) Se al tempo $t = 0$ il sistema ha funzione d'onda ψ, si calcoli l'evoluto $\psi(t)$.

d) Si calcoli $\langle\psi(t)|yS_z|\psi(t)\rangle$.

Esercizio 2. La Hamiltoniana di due particelle identiche di spin 1/2 in tre dimensioni è data da

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2) + \frac{\omega}{2\hbar}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2\,,$$

dove $\mathbf{S}_{1,2}$ sono gli spin delle due particelle e $\omega > 0$.

a) Determinare esattamente tutto lo spettro della Hamiltoniana. Si calcoli la degenerazione del livello fondamentale e del primo livello eccitato. Per gli stessi livelli, si calcolino le funzioni d'onda, esprimendole in termini delle autofunzioni normalizzate dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale e degli spinori $\chi_{1,m}$ e $\chi_{2,m}$ autofunzioni di $S_{1,z}$ ed $S_{2,z}$.

b) Data la Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{V} \qquad \mathcal{V} = m\omega^2 z_1 z_2\,,$$

con $0 < \lambda \ll 1$, si calcoli al primo ordine in λ lo spostamento in energia degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato di $\mathcal{H}_0$.

c) Si calcoli al primo ordine in λ la funzione d'onda dello stato fondamentale di $\mathcal{H}$. La si esprima in termini delle autofunzioni di $\mathcal{H}_0$.

Esercizio 1 17/09/2018 ①

a) Gli autovalori di S_x son $\pm\frac{\hbar}{2}$. Lo spettro si ottiene sommando agli autovalori dell'Hamiltoniana dell'oscillatore 2D, la quantità $\pm\frac{1}{2}\hbar\omega$

Base: $|n_x\, n_y\rangle |S_x = \pm\frac{\hbar}{2}\rangle$

$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) \pm \frac{\hbar}{2}\omega$

1) $n_x = n_y = 0 \quad S_x = -\hbar/2 \qquad E = \hbar\omega/2$

2) $n_x = n_y = 0 \quad S_x = \hbar/2$
$\left.\begin{matrix} n_x = 1 & n_y = 0 \\ n_x = 0 & n_y = 1 \end{matrix}\right\} S_x = -\hbar/2 \qquad E = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. 3

3) $\left.\begin{matrix} n_x = 1 & n_y = 0 \\ n_x = 0 & n_y = 1 \end{matrix}\right\} S_x = \hbar/2$
$\left.\begin{matrix} n_x = 2 & n_y = 0 \\ n_x = 1 & n_y = 1 \\ n_x = 0 & n_y = 2 \end{matrix}\right\} S_x = -\frac{\hbar}{2} \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. 5

b) Nella base in cui S_z è diagonale, $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Autovettori:
$|S_x = \pm\frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ \pm \chi_-) \qquad \chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_x = \frac{\hbar}{2}\rangle + |S_x = -\frac{\hbar}{2}\rangle\right)$

Se $\psi_n(x)\psi_m(y) = |n\, m\rangle$

$$\psi = \left[A|00\rangle + A\alpha e^{i\phi}|01\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_x = \frac{\hbar}{2}\rangle + |S_x = -\frac{\hbar}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}|00\rangle|S_x = -\frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{A}{\sqrt{2}}|00\rangle|S_x = \frac{\hbar}{2}\rangle +$$

$$\frac{A\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|01\rangle|S_x = -\frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{A\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle|S_x = \frac{\hbar}{2}\rangle$$

I quattro termini sono autofunzioni di H con autovalore $\frac{\hbar\omega}{2}, \frac{3}{2}\hbar\omega, \frac{3}{2}\hbar\omega, \frac{5}{2}\hbar\omega$ (nell'ordine)

Quindi

$$\mathrm{Prob}\left(E=\frac{\hbar\omega}{2}\right)=\frac{1}{4} \longrightarrow \left|\frac{A}{\sqrt{2}}\right|^2=\frac{1}{4} \qquad A^2=\frac{1}{2} \qquad A=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle=1 \qquad \frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}+\frac{A^2\alpha^2}{2}+\frac{A^2\alpha^2}{2}=1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha^2=1 \qquad \alpha^2=1 \qquad \alpha=1$$

Quindi

$$\psi=\frac{1}{2}|00\rangle|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle+\frac{1}{2}|00\rangle|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$+\frac{1}{2}e^{i\phi}|01\rangle|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle+\frac{1}{2}e^{i\phi}|01\rangle|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$

c)

$$\psi(t)=\frac{1}{2}e^{-i\omega t/2}|00\rangle|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$+\frac{1}{2}e^{-3i\omega t/2}\left(|00\rangle|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle+e^{i\phi}|01\rangle|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle\right)$$
$$+\frac{1}{2}e^{-5i\omega t/2}\,e^{i\phi}|01\rangle|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$

$$=\frac{1}{2}e^{-i\omega t/2}|00\rangle\left[|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle+e^{-i\omega t}|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle\right]$$
$$+\frac{1}{2}e^{-3i\omega t/2}e^{i\phi}|01\rangle\left[|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle+e^{-i\omega t}|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cancel{e^{-i\omega t/2}}\left(|00\rangle+e^{i\phi-i\omega t}|01\rangle\right)\times$$
$$\left[|S_x=-\tfrac{\hbar}{2}\rangle+e^{-i\omega t}|S_x=\tfrac{\hbar}{2}\rangle\right]$$

può essere eliminata

d)

Si può procedere in vari modi per semplificare il calcolo

(d1) Se $\psi(t) = \phi_{spaz}\,\phi_{spin}$

$$\phi_{spaz} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + e^{i\phi - i\omega t}|01\rangle\right)$$

$$\phi_{spin} = \left[|S_x = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle + e^{-i\omega t}|S_x = \tfrac{\hbar}{2}\rangle\right]$$

$$\langle\psi(t)|y\,S_z|\psi(t)\rangle =$$

$$\langle\phi_{spaz}|y|\phi_{spaz}\rangle\langle\phi_{spin}|S_z|\phi_{spin}\rangle$$

Ora $\phi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1+e^{-i\omega t}) + \chi_-(e^{-i\omega t}-1)\right]$

$$\langle\phi_{spin}|S_z|\phi_{spin}\rangle = \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[|1+e^{-i\omega t}|^2 - |e^{-i\omega t}-1|^2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left[2+2\cos\omega t - 2 + 2\cos\omega t\right] = \hbar\cos\omega t$$

Oscillatore 1D

A) $\langle 1|\cancel{x}|0\rangle_{1D} = \langle 0|x|1\rangle^*_{1D} = -i x_0$ se $|1\rangle = \eta^+|0\rangle$

B) $\langle 1|x|0\rangle_{1D} = \langle 0|x|1\rangle^*_{1D} = x_0$ se $|1\rangle = a^+|0\rangle$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Inoltre $\langle 0|x|0\rangle_{1D} = \langle 1|x|1\rangle_{1D} = 0$

Quindi

$$\langle\phi_{spaz}|y|\phi_{spaz}\rangle = \frac{1}{4}e^{-i\phi+i\omega t}\langle 01|y|00\rangle + \frac{1}{4}e^{i\phi-i\omega t}\langle 00|y|01\rangle$$

Quindi

A) $\langle\phi_{spaz}|y|\phi_{spaz}\rangle = \frac{x_0}{2}\sin(\omega t - \phi)$

B) $\langle\phi_{spaz}|y|\phi_{spaz}\rangle = \frac{x_0}{2}\cos(\omega t - \phi)$

Quindi

A) $$\langle\psi(t)|y\,S_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar x_0}{2}\sin(\omega t-\phi)\cos\omega t$$
$$= \frac{\hbar x_0}{4}\left(\sin(2\omega t-\phi)-\sin\phi\right)$$

B) $$\langle\psi(t)|y\,S_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar x_0}{2}\cos(\omega t-\phi)\cos\omega t$$
$$= \frac{\hbar x_0}{4}\left(\cos(2\omega t-\phi)+\cos\phi\right)$$

d2 È possibile utilizzare

$$S_z\left|S_x=-\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|S_x=+\frac{\hbar}{2}\right\rangle$$
$$S_z\left|S_x=+\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|S_x=-\frac{\hbar}{2}\right\rangle$$

e per l'oscillatore 1D

A) $$x|0\rangle_{1D} = -i x_0|1\rangle_{1D} \qquad |1\rangle = \eta^\dagger|0\rangle$$
$$x|1\rangle_{1D} = i x_0|0\rangle_{1D} - i x_0\sqrt{2}|2\rangle_{1D}$$

B) $$x|0\rangle_{1D} = x_0|1\rangle_{1D} \qquad |1\rangle = a^\dagger|0\rangle$$
$$x|1\rangle_{1D} = x_0|0\rangle_{1D} + x_0\sqrt{2}|2\rangle_{1D}$$

I termini proporzionali a $|2\rangle_{1D}$ possono essere ignorati

Facciamo solo il caso B) [il caso A) è analogo]

$$S_z y|\psi(t)\rangle = S_z y \frac{1}{2}\Big\{ |00\rangle|S_x = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle + e^{-i\omega t}|00\rangle|S_x = \tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$+ e^{-i\omega t + i\phi}|01\rangle|S_x = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle + e^{-2i\omega t + i\phi}|01\rangle|S_x = \tfrac{\hbar}{2}\rangle\Big\}$$
$$= \frac{\hbar x_0}{2\cdot 2}\Big\{ |01\rangle|S_x = \tfrac{\hbar}{2}\rangle + e^{-i\omega t}|01\rangle|S_x = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$+ e^{-i\omega t + i\phi}|00\rangle|S_x = \tfrac{\hbar}{2}\rangle + e^{-2i\omega t + i\phi}|00\rangle|S_x = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle\Big\}$$

Quindi

$$\langle\psi(t)|S_z y|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_0\hbar}{4}\Big\{ e^{2i\omega t - i\phi} + e^{-i\omega t}e^{i\omega t - i\phi}$$
$$+ e^{-i\omega t + i\phi}e^{i\omega t} + e^{-2i\omega t + i\phi}\Big\}$$
$$= \frac{1}{4}\hbar x_0\left(\cos(2\omega t - \phi) + \cos\phi\right)$$

Esercizio 2

1)
In assenza di principio di Pauli, la parte spaziale ha autofunzioni [$\psi_n(x)$ sono autofunzioni dell'oscillatore 1D]

$$\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(y_1)\psi_{n_3}(z_1)\psi_{m_1}(x_2)\psi_{m_2}(y_2)\psi_{m_3}(z_2)$$
$$= \psi_{n_1n_2n_3}(1)\,\psi_{m_1m_2m_3}(2)$$

con
$$E = \hbar\omega\,(n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3+3)$$

Quindi lo spettro della parte spaziale è

$$E = \hbar\omega\,(k+3) \qquad k \geq 0$$

La parte di spin è

$$H_{spin} = \frac{\omega}{2\hbar}\,\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 = \frac{\omega}{4\hbar}\left(S^2_{tot} - \frac{3\hbar^2}{2}\right)$$

con autovalori

$$S_{tot}=1 \quad E=\frac{\hbar\omega}{8} \qquad\qquad S_{tot}=0 \quad E=-\frac{3}{8}\hbar\omega$$

Per il p. di Pauli, se $\psi_{spaziale}$ è pari sotto scambio $S_{tot}=0$, se è dispari $S_{tot}=1$.

Per ogni $K\geq 1$ vi sono stati spaziali pari e dispari
Per $K=0$ l'unico stato è pari sotto scambio

Quindi

$$\text{SPETTRO}\begin{cases} E_K = \hbar\omega\,(K+3)+\dfrac{\hbar\omega}{8} & K\geq 1 \quad (S_{tot}=1) \\ E_K = \hbar\omega(K+3) - \dfrac{3}{8}\hbar\omega & K\geq 0 \quad (S_{tot}=0) \end{cases}$$

I due stati più bassi hanno

(A) $K=0 \quad S_{tot}=0$

(B) $K=1 \quad S_{tot}=0$

(A) stato unico $\quad \psi_0(x_1)\psi_0(y_1)\psi_0(z_1)\psi_0(x_2)\psi_0(y_2)\psi_0(z_2)|S_{tot}=0\rangle$
$= \psi_f(1,2)|S_{tot}=0\rangle$

(B) 3 stati degeneri: se $\psi_{mnp}(\vec{r}) = \psi_m(x)\psi_n(y)\psi_p(z)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{100}(r_1)\psi_{000}(r_2)+\psi_{000}(r_1)\psi_{100}(r_2)\right)|S_{tot}=0\rangle = \psi_x(1,2)|S_{tot}=0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{010}(r_1)\psi_{000}(r_2)+\psi_{000}(r_1)\psi_{010}(r_2)\right)|S_{tot}=0\rangle = \psi_y(1,2)|S_{tot}=0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{001}(r_1)\psi_{000}(r_2)+\psi_{000}(r_1)\psi_{001}(r_2)\right)|S_{tot}=0\rangle = \psi_z(1,2)|S_{tot}=0\rangle$$

con $|S_{tot}=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{1+}\chi_{2-} - \chi_{1-}\chi_{2+}\right)$

NOTAZIONE: indichiamo le tre funzioni come

$\psi_x(1,2)|S_{tot}=0\rangle$

$\psi_y(1,2)|S_{tot}=0\rangle$

$\psi_z(1,2)|S_{tot}=0\rangle$

Domanda (b)

È utile ricordare che per l'oscillatore 1D vale

$\langle n|x|n\rangle$ per ogni n e

$x|0\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle \qquad$ se $|1\rangle = \eta^+|0\rangle$

$x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle \qquad$ se $|1\rangle = a^+|0\rangle$

Vale per lo stato fondamentale

$$\langle \psi_f | z_1 z_2 | \psi_f \rangle = \langle 0|z|0\rangle\langle 0|z|0\rangle = 0$$

Quindi $\Delta E_f = 0$

Per i tre ~~~~ ~~~~ stati del primo livello eccitato $(a = x, y, z,\ b = x, y, z)$

$$\langle S_{tot}=0| \langle \psi_a(1,2)| z_1 z_2 | \psi_b(1,2)\rangle | S_{tot}=0\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \langle \psi_a(1)\psi_0(2)| + \langle \psi_0(1)\psi_a(2)| \right\} |z_1 z_2|$$

$$\left\{ |\psi_b(1)\psi_0(2)\rangle + |\psi_0(1)\psi_b(2)\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\langle a|z_1|b\rangle \cancel{\underbrace{\langle 0|z_2|0\rangle}_{=0}} + \frac{1}{2}\langle a|z_1|0\rangle\langle 0|z_2|b\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}\langle 0|z_1|b\rangle\langle a|z_2|0\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle 0|z_1|0\rangle}_{=0}\langle a|z_2|b\rangle =$$

$$= \langle a|z_1|0\rangle\langle 0|z_2|b\rangle$$

se $a \neq 3$ $\quad \langle a|z|0\rangle = 0$

Quindi c'è un solo elemento di matrice non nullo $a = b = 3$ e vale

$$\langle\, |V|\, \rangle = m\omega^2 |\langle 3|z|0\rangle|^2 = m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Quindi il livello 3 volte degenere si separa in

$\Delta E = \frac{\lambda\hbar\omega}{2}$ 1 volta degenere

$\Delta E = 0$ 2 volte degenere

(c)

Vale

$$z_1 z_2 |\psi_f(1,2)\rangle |S_{tot}=0\rangle =$$

$$= \pm \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\psi_{001}(r_1)\psi_{001}(r_2)\right)|S_{tot}=0\rangle = \begin{cases} + \text{ se } |1\rangle = a^\dagger|0\rangle \\ - \text{ se } |1\rangle = \eta^\dagger|0\rangle \end{cases}$$

Lo stato $\psi_{001}(r_1)\psi_{001}(r_2)|S_{tot}=0\rangle$ è autostato di H_0

con Energia $E = E_{fond} + 2\hbar\omega$

Quindi

$$\psi_{fond} = \psi_f(1,2)|S_{tot}=0\rangle + \lambda a \, \psi_{001}(r_1)\psi_{001}(r_2)|S_{tot}=0\rangle$$

con

$$a = \frac{\pm \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot m\omega^2}{(-2\hbar\omega)} = \mp \frac{1}{4} \quad \begin{cases} - \text{ se } |1\rangle = a^\dagger|0\rangle \\ + \text{ se } |1\rangle = \eta^\dagger|0\rangle \end{cases}$$