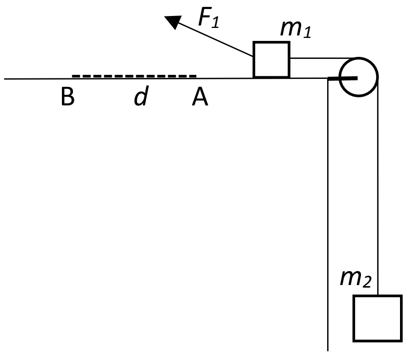
Esame scritto del corso di Fisica per Scienze biologiche

Proff. M. De Luca, F. Frasca, L. Graziani, R. Maoli, R. Schneider – 20 giugno 2022

Esercizio 1



Un sistema è costituito da due corpi collegati insieme da una corda e una carrucola ideali. Il corpo di massa m_1 = 2.40 kg si muove su un piano orizzontale inizialmente privo di attrito mentre il secondo corpo, di massa m_2 si muove verticalmente. Sul primo corpo è applicata una forza costante F_1 = 27.0 N inclinata di θ = 30.0° rispetto all'orizzontale.

a) Sapendo che il primo corpo si muove verso sinistra con una accelerazione a = 1.20 m/s^2, calcolare la massa m_2 e la tensione T della corda.

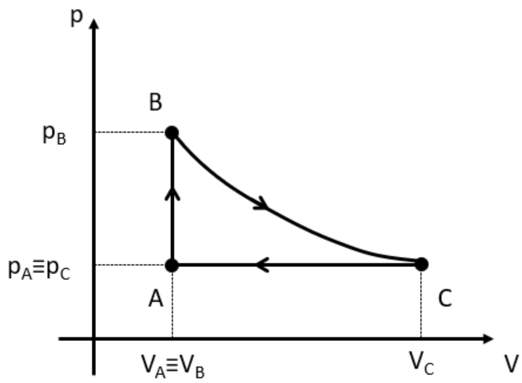
Proseguendo nel suo moto, il primo corpo percorre il tratto AB di lunghezza d = 3.50 m in cui il piano diventa scabro.

b) Calcolare il coefficiente d'attrito μ_d sapendo che in questo tratto il primo corpo si muove a velocità costante v_1= 1.00 m/s.

c) Calcolare la variazione di energia meccanica totale dell'intero sistema da quando il primo corpo entra nel tratto scabro in A a quando ne esce in B.

Esercizio 2

All'interno di un cilindro ideale di base S = 6.00 dm^2, è presente un gas perfetto con volume iniziale V_A = 12.0 dm^3 e pressione iniziale p_A = 4.00 atm. Il cilindro è chiuso da un pistone ideale. Il gas compie un ciclo completo reversibile ABCA, come mostrato in figura.



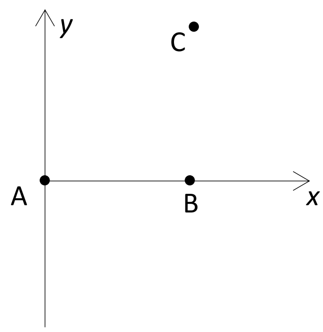
a) Sapendo che durante l'espansione isoterma BC il lavoro compiuto dal sistema a temperatura pari a 438 K fa sollevare il pistone di ΔL=40.0 cm, calcolare il numero di moli di gas presenti nel cilindro.

b) Sapendo che Q_{AB} = 24300 J, specificare se il gas è monoatomico, biatomico o poliatomico.

Alla fine del ciclo, ossia quando il gas torna allo stato A, il pistone viene bloccato e nel cilindro viene introdotta una barretta di rame (c_{cu} = 385 J kg^{-1}·K^{-1}), di massa m_{cu} = 210 g, a temperatura T_{cu} = 650 K e di volume trascurabile rispetto a quello del gas.

c) Calcolare la temperatura finale di equilibrio T_{eq} del sistema.

Esercizio 3



Un sistema di cariche è costituito da 3 cariche puntiformi posizionate su 3 dei 4 vertici di un quadrato di lato d= 10.0 cm. La prima carica (q_A = 3.00 μC) si trova nel punto A di coordinate (0;0), la seconda carica (q_B = 5.00 μC) nel punto B di coordinate (d;0) e la terza carica (q_C = 4.00 μC) nel punto C di coordinate (d; d), come in figura.

a) Calcolare modulo, direzione e verso del campo elettrico totale nel punto D di coordinate (0;d), ovvero il quarto vertice del quadrato.

b) Calcolare il potenziale nel punto Q al centro del quadrato formato dai punti A,B,C,D.

c) Calcolare il lavoro che bisognerebbe compiere dall'esterno per portare una carica puntiforme positiva (q_0 = 0.010 μC) da una distanza infinita al punto Q definito sopra. Dire se tale lavoro cambierebbe se la carica fosse invece negativa (q_0 = -0.010 μC).

d) Ora si immagini di rimuovere la carica q_C da C e di assumere q_A = q_B = 3.00 μC. Si lasci la carica q_0 = 0.010 μC libera di muoversi nel punto Q. Quanto dovrebbe valere la massa m di q_0 affinché essa resti ferma in equilibrio?

Soluzione 1

a) Disegnando il diagramma delle forze per entrambi i corpi, scegliando due sistemi di riferimento collegati tra loro, in cui l'asse parallelo al moto per il primo corpo corrisponda in verso all'asse parallelo al moto per il secondo corpo, sfruttando il fatto che la tensione applicata al primo corpo, in modulo, è uguale alla tensione applicata al secondo corpo essendo sia la corda che la carrucola ideali, si ha il seguente sistema di equazioni:
$$F_1 \cos 30 - T = m_1 a$$
$$T - m_2 g = m_2 a$$
Questo sistema per mette di calcolarsi l'accelerazione in funzione di m_2 e quindi esplicitando per m_2 si ha:
$$a = \frac{F_1 \cos 30 - m_2 g}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{F_1 \cos 30 - m_1 a}{a + g} = \frac{27 \cos 30 - 2.4 \cdot 1.2}{1.2 + 9.8} = 1.86 \text{ kg}$$
Dal sistema si trova la tensione:
$T = m_2(g + a) = F_1 \cos 30 - m_1 a = 20.5$ N

b) Nel tratto con attrito i corpi si muovono a velocità costante e quindi la loro accelerazione è nulla. In questo caso possiamo parlare di equilibrio dinamico e la risultante delle forze applicate su ogni corpo è nulla. Fare attenzione che la tensione in questo tratto è diversa dalla tensione calcolata precedentemente perché sono cambiate le forze in gioco ed è cambiato il tipo di moto:
$$F_1 \cos 30 - T - \mu_d N = 0$$
$$T - m_2 g = 0$$
Calcolando la reazione vincolare sul primo corpo ($N + F_1 \sin 30 - m_1 g = 0$) e la tensione dalla seconda equazione, si ha
$F_1 \cos 30 - m_2 g - \mu_d (m_1 g - F_1 \sin 30) = 0$
$$\mu_d = \frac{F_1 \cos 30 - m_2 g}{m_1 g - F_1 \sin 30} = \frac{27 \cos 30 - 1.86 \cdot 9.8}{2.4 \cdot 9.8 - 27 \sin 30} = 0.514$$

c) L'energia cinetica del sistema non cambia e nemmeno l'energia potenziale del primo corpo. Di conseguenza la variazione di energia meccanica è esclusivamente data dalla variazione dell'energia potenziale del secondo corpo che, mentre il primo corpo si sposta verso sinistra, risale verso l'alto della stessa quantità d. Si ha:
$$\Delta E = m_2 g \Delta h = m_2 g d = 63.8 \text{ J}$$
Alternativamente si può calcolare la variazione di energia meccanica come lavoro delle forze non conservative. Il lavoro della tensione è uguale e opposto per le due tensioni applicate ai due corpi (come sempre si verifica nel caso di lavoro delle forze interne). Resta quindi da calcolare il lavoro di F_1 e della forza di attrito:
$$\Delta E = \big(F_1 \cos 30 - \mu_d (m_1 g - F_1 \sin 30)\big) d = 63.8 \text{ J}$$

Soluzione 2

1. Siccome $V_A = V_B$ e il pistone si muove di $\Delta h = 2h$, si ha $V_C = 3V_B = 36$ l.
   Il numero di moli si calcola dall'equazione di stato applicata in C:
$$n = \frac{p_C V_C}{R T_C} = \frac{4 \cdot 101300 \cdot 36 \cdot 10^{-3}}{8.314 \cdot 438} = 4.00 \text{ moli}$$
2. La natura del gas (ossia se sia monoatomico, biatomico o poliatomico) si ricava a partire dal calore acquistato durante la trasformazione AB. Poiché la temperatura in A non è nota, si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti:
$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{4 \cdot 101300 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 8.314} = 146 \text{ K}$$
   Oppure, alternativamente, utilizzando la prima legge di Gay-Lussac per la trasformazione isobara CA:
$$T_A = \frac{V_A}{V_C} T_C = \frac{T_C}{3} = 146 \text{ K}$$

Dalla formula per il calore associato a una trasformazione isocora, esplicitando per il numero di gradi di libertà f, si ha:

$$Q_{AB} = n\frac{f}{2}R(T_B - T_A) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2Q_{AB}}{nR(T_B - T_A)} = \frac{2 \cdot 24300}{4 \cdot 8.314 \cdot (438 - 146)} = 5$$

Il gas perfetto ha 5 stati di libertà, dunque, è un gas biatomico.

3. La temperatura di equilibrio del sistema si ricava assumendo che il calore totale scambiato durante il processo sia nullo.

$$\sum Q_i = nc_V\left(T_{eq} - T_A\right) + m_{Cu}c_{Cu}\left(T_{eq} - T_{Cu}\right) = 0$$

$$T_{eq} = \frac{nc_V T_A + m_{Cu}c_{Cu}T_{Cu}}{nc_V + m_{Cu}c_{Cu}} = \frac{4 \cdot 2.5 \cdot 8.314 \cdot 146 + 0.21 \cdot 385 \cdot 650}{4 \cdot 2.5 \cdot 8.314 + 0.21 \cdot 385} = 394\ \mathrm{K}$$

Soluzione 3

a) I campi generati dalle cariche puntiformi q in un punto generico P sono dati da:

$\overrightarrow{\mathrm{E_q}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{d}_{\mathrm{qP}}^2}\hat{d}$, dove $\mathrm{d_{qP}}$ è la distanza tra q e P e $\hat{d}$ è il versore diretto da q a P. Trattandosi di tutte cariche positive, il campo generato da A in D è diretto verso $\hat{y}$, il campo generato da C in D è diretto verso $-\hat{x}$, e il campo generato da B in D è diretto verso $-\hat{x}, \hat{y}$ formando un angolo di 45° con l'asse $-\hat{x}$. La distanza tra A e D e tra C e D è pari a d, mentre la distanza tra B e D è pari a $\sqrt{2}$d. Pertanto il campo totale in D, risultante dal principio di sovrapposizione, ha componenti date da:

$$\mathrm{E_{D,y}} = \mathrm{E_A}+\mathrm{E_B}\cos 45° = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 d^2} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}d)^2}\cos 45° = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(q_A + \frac{q_B}{2}\cos 45°\right)$$

$$= \frac{\mathrm{k_0}}{d^2}\left(q_A + \frac{q_B}{2}\sqrt{2}/2\right) = \frac{9\ 10^9}{(0.1)^2}\left(3 + \frac{5}{2}\sqrt{2}/2\right) 10^{-6} = 42.9 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} (o\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$$

$$\mathrm{E_{D,x}} = -\mathrm{E_C}-\mathrm{E_B}\cos 45° = -\frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{2}d\right)^2}\cos 45° = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(-q_C - \frac{q_B}{2}\cos 45°\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{k_0}}{d^2}\left(q_C + \frac{q_B}{4}\sqrt{2}\right) = -\frac{9\ 10^9}{(0.1)^2}\left(4 + \frac{5}{4}\sqrt{2}\right) 10^{-6} = -51.9 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} (o\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$$

Quindi il campo in D ha modulo $\mathrm{E_D} = 67.3\ 10^5$ V/m e forma un angolo di

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{\mathrm{E_{D,y}}}{\mathrm{E}_{D,\mathrm{x}}}\right| = 39.6\ °$$

con l'asse - x.

b) Il potenziale di una carica puntiforme q in un punto generico P è: $\mathrm{V} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d_{qP}}$. Il punto Q dista da A, B e C la meta' della diagonale BD del quadrato, ovvero $\sqrt{2}d/2$. Quindi il potenziale totale in Q, dato dal principio di sovrapposizione, è:

$$\mathrm{V(Q)} = \mathrm{V(A)} + \mathrm{V(B)} + \mathrm{V(C)} = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}d/2} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}d/2} + \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}d/2}$$

$$= \frac{\mathrm{k_0}}{\sqrt{2}d} 2\ (q_A + q_B + q_C) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{9\ 10^9}{0.1}\ (3 + 5 + 4)\ 10^{-6} = 15.3 \cdot 10^5\ \mathrm{V}$$

c) Il lavoro che la forza elettrostatica dovrebbe compiere per spostare q_0 da una distanza infinita al punto Q è $L_e = -\Delta U_e$, dove U_e è l'energia potenziale elettrostatica.

$L_e = -\Delta U_e = -(U_{e,fin} - U_{e,in}) = U_{e,in} - U_{e,fin}$

Si puo' assumere $U_{e,in} = 0$ essendo il punto iniziale a distanza infinita, quindi

$L_e = -U_{e,fin} = -q_0 V_{fin} = -q_0 V(Q) = -10^{-8}$ C $\cdot 15.3 \cdot 10^5$ V = $-15.3 \cdot 10^{-3}$ J

Il lavoro che la forza esterna dovrebbe compiere è uguale e opposto a quello della forza elettrostatica, quindi $L_{ext} = 15.3 \cdot 10^{-3}$ J. Tale lavoro è positivo perché per avvicinare una carica positiva a un sistema di cariche positive bisogna compiere lavoro contro una forza repulsiva.

Se la carica fosse negativa, avremmo $L_{ext} = -15.3 \cdot 10^{-3}$ J.

d) Senza la carica in C e con $q_A = q_B$, il campo totale in Q al centro del quadrato è diretto verso l'alto ($E_{Q,x} = 0$) in quanto dato dalla somma vettoriale tra due campi (quello generato da q_A, che forma 45° con l'asse x, e quello generato da q_B, che forma 45° con l'asse -x). Pertanto si ha:

$$E_Q = E_{Q,y} = E_{A,y} + E_{B,y} = 2E_{A,y} = 2\,E_A \cos 45° = \sqrt{2}\,E_A = \sqrt{2}\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 {d_{AQ}}^2} = \sqrt{2}\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}d/2)^2}$$
$$= \sqrt{2}\frac{2q_A}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \sqrt{2}\frac{2k_0 q_A}{d^2}$$

Tale campo esercita su q_0 una forza elettrostatica, di modulo

$F_e = q_0 E_Q = \sqrt{2}\frac{2k_0 q_A q_0}{d^2}$, diretta verso l'alto. La carica sarà in equilibrio se tale forza è uguale e opposta alla forza peso, mg. Pertanto, il valore di *m* è

$m = F_e/g = \sqrt{2}\frac{2k_0 q_A q_0}{g d^2} = 7.78 \cdot 10^{-3}$ kg = 7.78 g