Cognome e nome .... **N. matricola** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 18–19 febbraio ◯ 21–22 febbraio ◯ 27 febbraio – 1 marzo ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-|x+1|}(x^2+1)\,,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione piana
$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ \ln(1+x^2) \leq y \leq \ln(3+x)\Big\}\,.$$

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso
$$81(3-zi)^4 = z^4\ , \qquad 2(\operatorname{Re} w)^3 = \operatorname{Re}(w^3)\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:
$$f(x) = 1-\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \operatorname{tg}(x^2+x^\alpha)-x^2 \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0)\,.$$

---

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\ln(n^{2\alpha}+1) - \ln(n^{2\alpha}+n)\Big)\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-|x+1|}(x^2+1)\,,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è positiva nel suo dominio. f è continua nel suo dominio.

Limiti significativi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Derivabilità: f è derivabile per $x \neq -1$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+1}(x+1)^2 & x < -1 \\ -e^{-x-1}(x-1)^2 & x > -1 \end{cases}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+}\left(-e^{-x-1}(x-1)^2\right) = -4$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} e^{x+1}(x+1)^2 = 0$$

Pertanto $x=-1$ è p.to angoloso.

$f'(x) = 0 \iff x = 1$ p.to di flesso a tg. orizzontale

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$

f è strettamente crescente in $(-\infty,-1]$

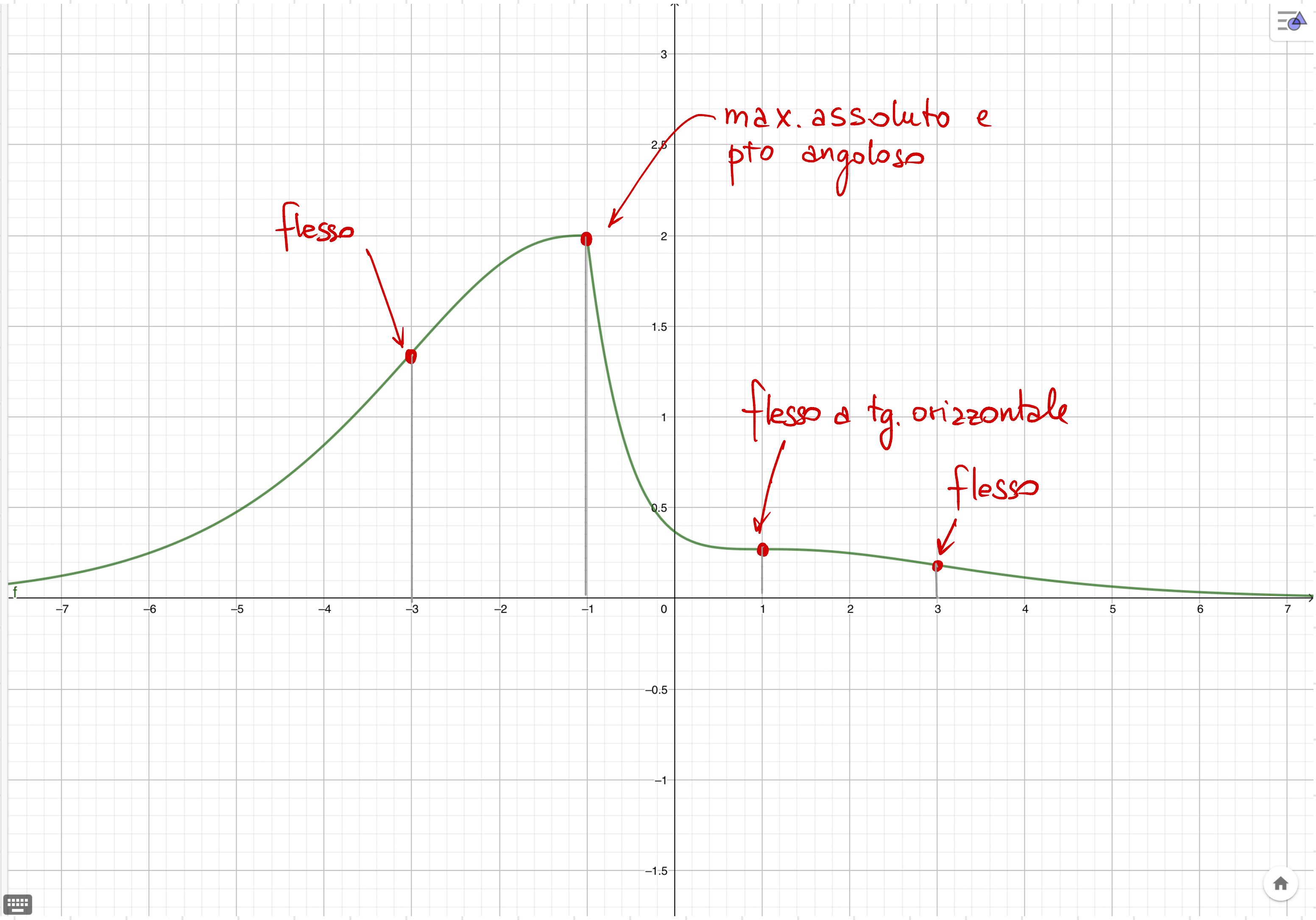
strettamente decrescente in $[-1,+\infty)$.

$x=-1$ è p.to di massimo assoluto (non regolare).

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x+1}(x+1)(x+3) & \text{se } x < -1 \\ e^{-x-1}(x-1)(x-3) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

f è strettamente convessa in $(-\infty, -3]$, in $[-1, 1]$ e in $[3, +\infty)$, strettamente concava in $[-3, -1]$ e in $[1, 3]$

I punti $x = -3$, $x = 1$, $x = 3$ sono pti di flesso.



2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ \ln(1+x^2) \leq y \leq \ln(3+x)\Big\}\,.$$

Si ha $\ln(1+x^2) \leq \ln(3+x)$ per $x \in [-1, 2]$,
quindi

$$\text{Area } E = \int_0^2 \left(\ln(3+x) - \ln(1+x^2)\right) dx.$$

$$\int_0^2 \ln(3+x)\,dx \underset{\uparrow}{=} x\ln(3+x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{3+x}\,dx =$$

[per parti]

$$= 2\ln 5 - \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{3+x}\right) dx =$$

$$= 2\ln 5 - 2 + 3\ln(3+x)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\ln 5 - 2 + 3\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx \underset{\uparrow}{=} x\ln(1+x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx =$$

[per parti]

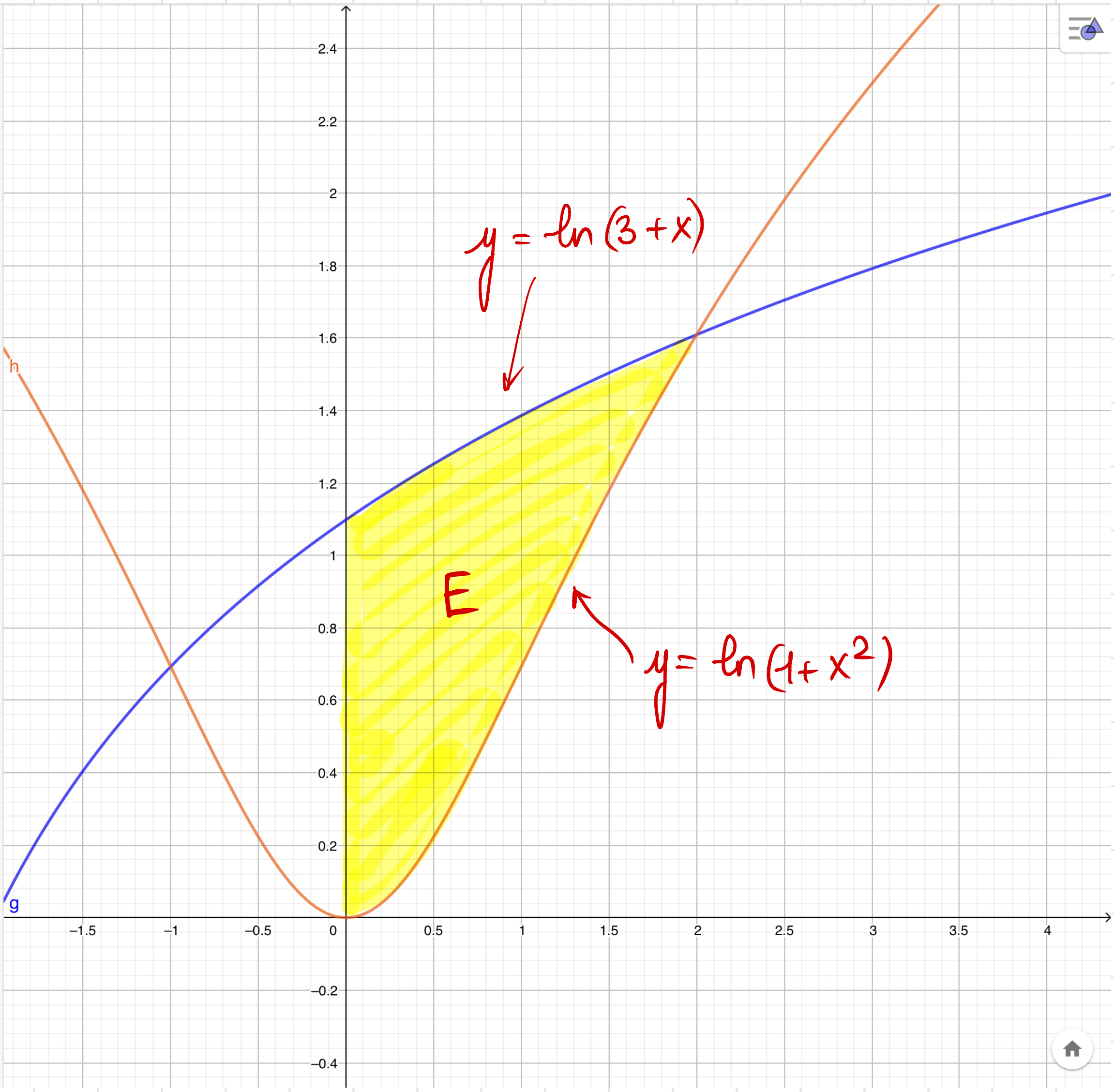
$$= 2\ln 5 - \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= 2\ln 5 - 4 + 2\,\text{arctg}\,x\Big|_0^2 = 2\ln 5 - 4 + 2\,\text{arctg}\,2$$

Pertanto

$$\text{Area } E = 2 + 3\ln\left(\frac{5}{3}\right) - 2\,\text{arctg}\,2$$

[verificato con Mathematica]



3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$81(3 - zi)^4 = z^4\ , \qquad 2(\operatorname{Re} w)^3 = \operatorname{Re}(w^3)\ .$$

1) Dopo aver osservato che $z = \frac{3}{i}$ non è soluzione, basta porre $\frac{z}{3 - zi} = v$ e l'eq^{ne} diventa

$$v^4 = 81$$

Quindi v ha 4 valori

$$v_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$$

$$v_1 = 3e^{i\pi} = -3$$

$$v_2 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i$$

$$v_3 = 3$$

$$\frac{9}{1+3i} = \frac{9(1-3i)}{10}$$

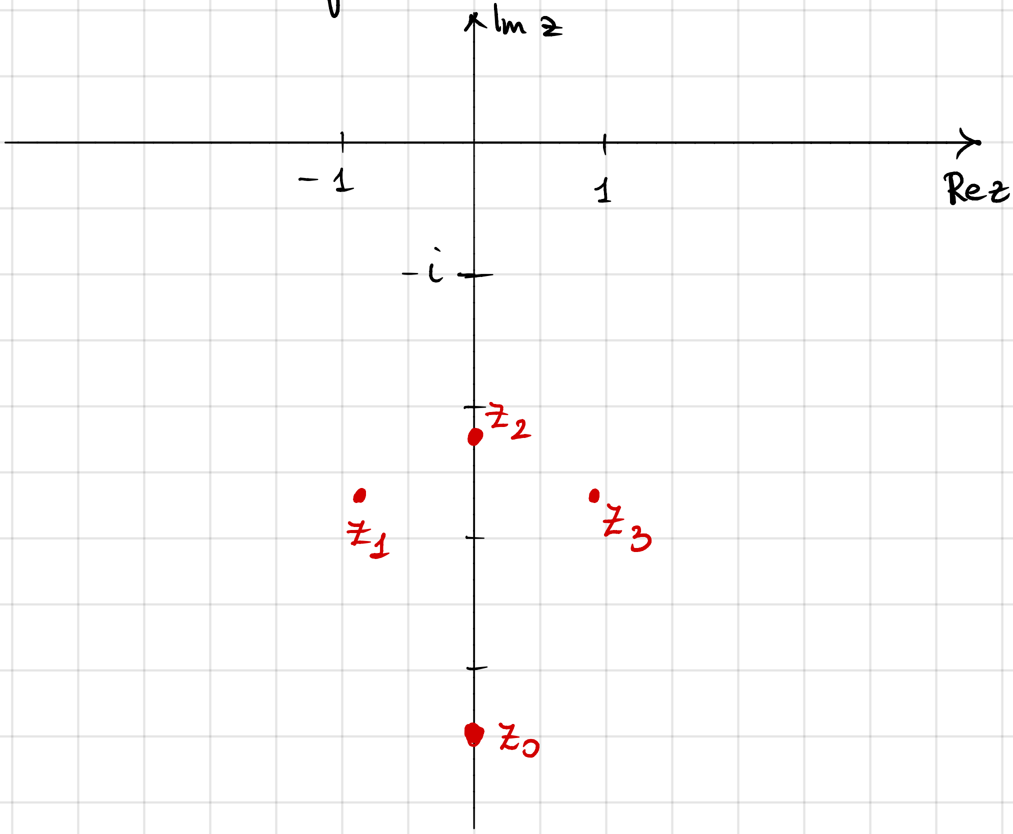
Poiché $z = \frac{3v}{1+iv}$, si ottengono le soluzioni

$$z_0 = -\frac{9}{2}i$$

$$z_1 = -\frac{9}{10}(1+3i)$$

$$z_2 = -\frac{9}{4}i$$

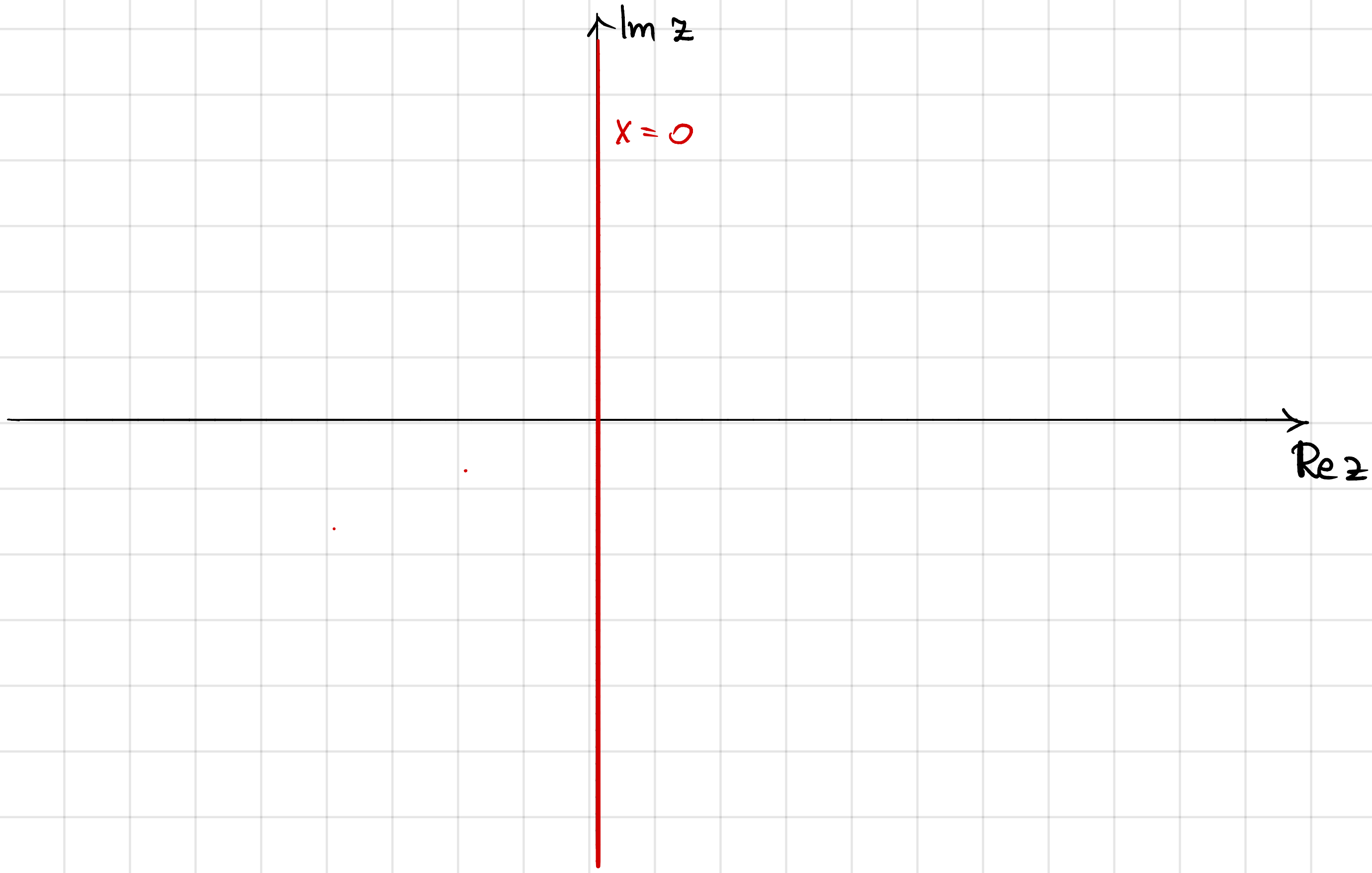
$$z_3 = \frac{9}{10}(1-3i)$$



2) Posto $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, l'eq^{ne} diventa:

$$2x^3 = x^3 - 3xy^2, \text{ cioè } x\left(x^2 + 3y^2\right) = 0$$

Poiché $x^2 + 3y^2$ si annulla solo nell'origine, le soluzioni sono tutti i pti della retta $x = 0$ (cioè i numeri immaginari puri)



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \operatorname{tg}(x^2 + x^\alpha) - x^2 \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0)\,.$$

1) $$1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{x^2} = 1 - e^{x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = (*)$$

<u>OSS</u> $$x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{x^2}{x^3} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \,,$$ quindi

$$(*) \sim -x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to +\infty$

2) Per lo sviluppo di MacLaurin di $\operatorname{tg} t$, si ha

$$g(x) = (\cancel{x^2} + x^\alpha) + \frac{(x^2 + x^\alpha)^3}{3} + o\left((x^2 + x^\alpha)^3\right) - \cancel{x^2} =$$

$$= x^\alpha + \frac{x^6}{3} + x^{4+\alpha} + x^{2+2\alpha} + \frac{x^{3\alpha}}{3} + o\left((x^2 + x^\alpha)^3\right)$$

per $x \to 0$

Pertanto se $\alpha < 6$ si ha

$$g(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) \sim x^\alpha \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Infatti $$o\left((x^2 + x^\alpha)^3\right) = \begin{cases} o(x^{3\alpha}) & \text{se } \alpha < 2 \\ o(x^6) & \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Se $\alpha = 6$, $g(x) = \frac{4}{3} x^6 + o(x^6) \sim \frac{4}{3} x^6$ per $x \to 0^+$

Se $\alpha > 6$, $g(x) = \frac{x^6}{3} + o(x^6) \sim \frac{x^6}{3}$

Pertanto $g(x)$ è infinitesimo di ordine $\beta = \min\{6, \alpha\}$ per $x \to 0^+$.

Nel caso $\alpha < 2$ l'esercizio si poteva risolvere anche con i limiti notevoli, senza il polinomio di Taylor.

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\ln(n^{2\alpha}+1)-\ln(n^{2\alpha}+n)\Big).$$

Poniamo $b_n = \ln(n^{2\alpha}+1) - \ln(n^{2\alpha}+n) = \ln\left(\frac{n^{2\alpha}+1}{n^{2\alpha}+n}\right)$.

Se $\alpha < \frac{1}{2}$, allora $b_n \longrightarrow -\infty$

quindi il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la serie non converge.

Se $\alpha = \frac{1}{2}$, allora $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \longrightarrow -\ln 2$,

quindi anche in questo caso la serie non converge.

Se $\alpha > \frac{1}{2}$, allora

$$b_n = \ln\Big(1 - \underbrace{\frac{n-1}{n^{2\alpha}+n}}_{\downarrow\, 0}\Big) \sim -\frac{n-1}{n^{2\alpha}+n} \sim -\frac{1}{n^{2\alpha-1}}$$

Quindi, per $\alpha > \frac{1}{2}$, si ha

$$|(-1)^n b_n| \sim \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

La serie converge assolutamente se e solo se $2\alpha-1>1$, cioè $\alpha > 1$.

Il caso $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ si può studiare con il criterio di Leibniz. Osservato che b_n è definitivamente negativo, dobbiamo controllare che

$(-1)^n b_n = (-1)^{n+1}(-b_n)$ verifica le ipotesi, cioè

1) $-\ b_n \to 0$ vero se $\alpha > \frac{1}{2}$

2) $-\ b_n$ definitivamente decrescente.

Questo equivale a dire che

$$\frac{n^{2\alpha}+n}{n^{2\alpha}+1} = 1 + \frac{n-1}{n^{2\alpha}+1}$$ sia def^{te} decrescente,

cioè che $\frac{n-1}{n^{2\alpha}+1}$ sia def^{te} decrescente.

Posto $f(x) = \frac{x-1}{x^{2\alpha}+1}$, si ha

$(1-2\alpha)x^{2\alpha} < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$

$$f'(x) = \frac{x^{2\alpha}+1-(x-1)2\alpha x^{2\alpha-1}}{(x^{2\alpha}+1)^2} = \frac{(1-2\alpha)x^{2\alpha}+2\alpha x^{2\alpha-1}+1}{(x^{2\alpha}+1)^2}$$

$(x^{2\alpha}+1)^2 > 0$

Quindi $f'(x) < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$. Le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate.

In definitiva:

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$

La serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.