Cognome e nome .... **N. matricola** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 16–18 gennaio ◯ 22–25 gennaio ◯ 29 gennaio–1 febbraio ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(x^2-4)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|x^2-4|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

---

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^{10} - 31z^5 - 32 = 0\ , \qquad w^2|w|^4 = -4(\overline{w})^4\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \cos\frac{2}{x} - e^{(x+5)/x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty)\ , \qquad g(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1+x^2} \quad (\text{per } x \to 0^+)\ ,$$

---

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\arcsin\frac{3}{n+2} - \frac{\alpha}{n+2} \right)\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^3(n^2-3^n)} (x^2-4)^n\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 6 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(x^2-4)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|x^2-4|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

Dominio: $x \neq \pm 2$. f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x \geq 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) < 0 \iff 0 < x < 2$.

$f(x) > 0 \iff x > 2$

f è di classe C^∞ nel suo dominio, quindi continua.

$\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$ $\qquad x = 2$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. f non ammette asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\,\frac{x^3-6x}{(x^2-4)^{4/3}}$$

f strettamente crescente in $[\sqrt{6}, +\infty)$

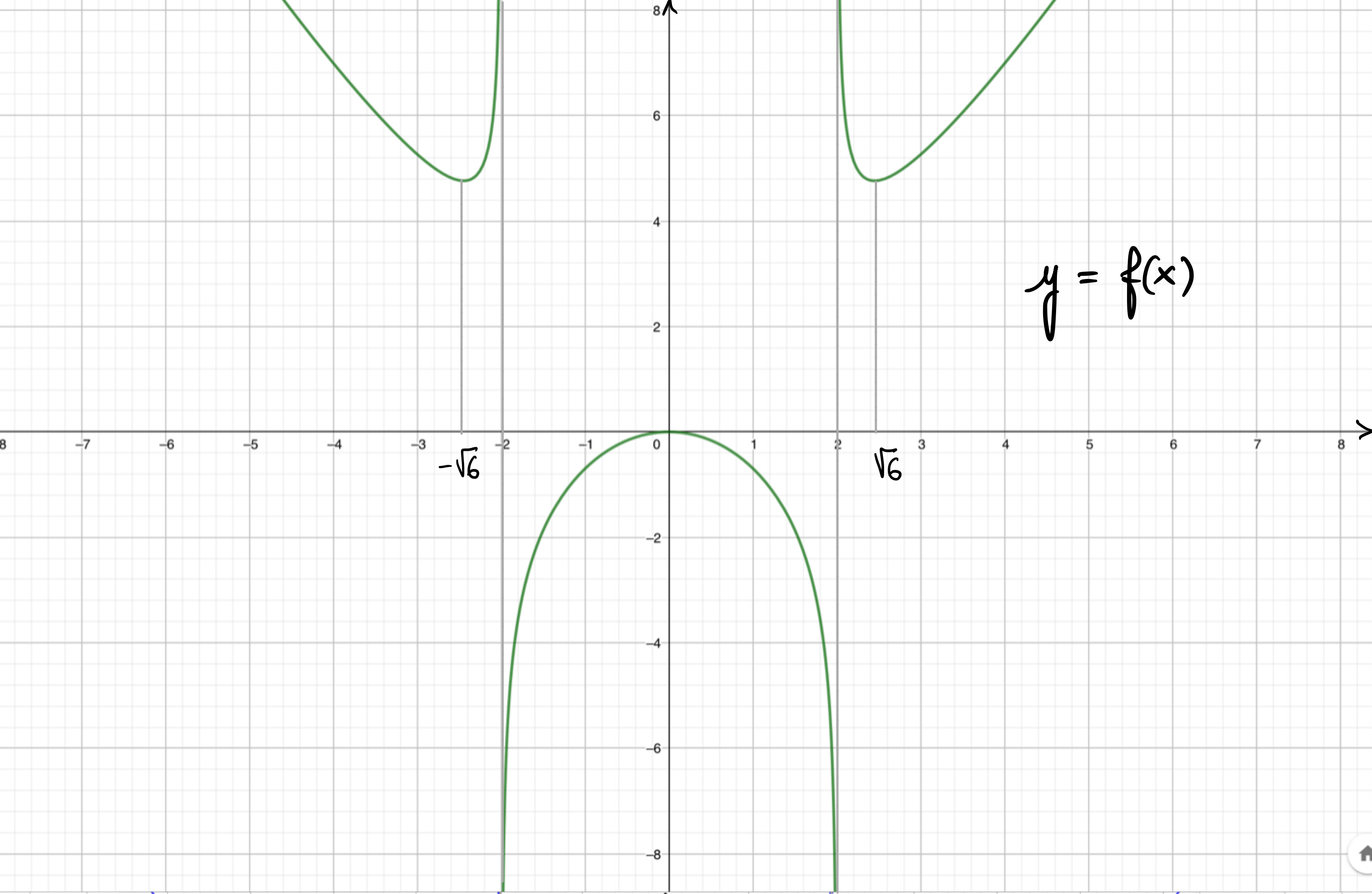
f strett. decrescente in $[0, 2)$ e in $(2, \sqrt{6}]$.

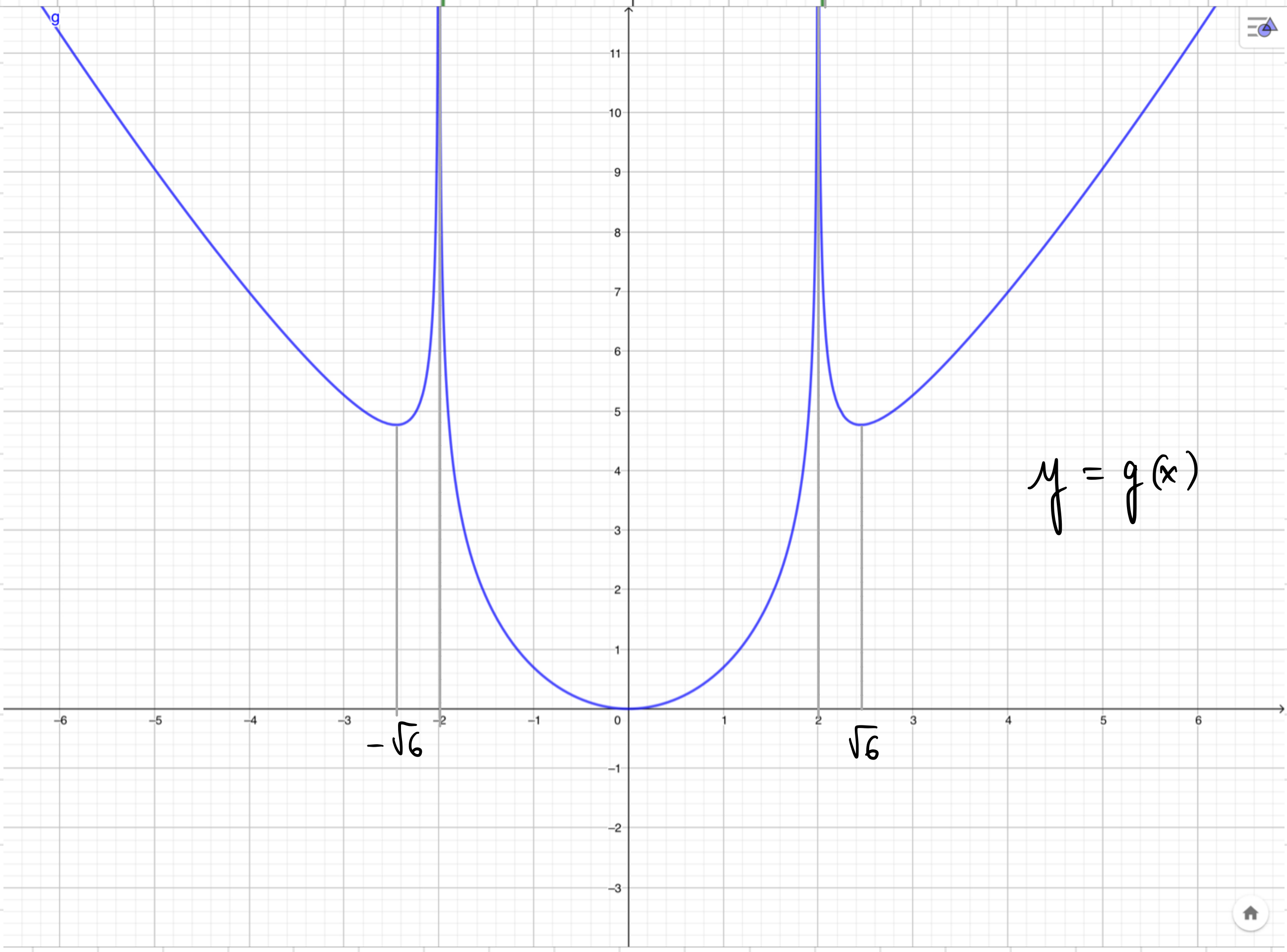
$x = 0$ pto di max relativo, $\quad x = \sqrt{6}$ pto di min. relativo

$$f''(x) = \frac{4}{9}\,(x^2-4)^{-7/3}\,\underbrace{(x^4-6x^2+72)}_{\text{sempre} > 0}$$

f strettamente concava in $[0, 2)$, strett. convessa in $(2, +\infty)$.

Niente flessi. Il grafico è il seguente:





Il grafico di $g(x)$ è semplicemente ottenuto "ribaltando" il grafico di f per $x \in (-2,2)$.

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

Integriamo per parti due volte:

$$I_n = \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{2x}}{2} \sin^n(\pi x)\Big|_0^1}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - \frac{n\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{n\pi}{4} e^{2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\Big|_0^1}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\pi^2}{4} \int_0^1 e^{2x} \sin^{n-2}(\pi x) \overbrace{\cos^2(\pi x)}^{\substack{1-\sin^2(\pi x) \\ \shortparallel}}\, dx +$$

$$- \frac{n\pi^2}{4} \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} (I_{n-2} - I_n) - \frac{n\pi^2}{4} I_n =$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2} - \frac{\pi^2 n^2}{4} I_n.$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4+\pi^2 n^2} I_{n-2}}$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{3\pi^2}{(1+4\pi^2)} I_2 = \frac{3}{2} \frac{\pi^4}{(1+4\pi^2)(1+\pi^2)} I_0$$

e, poiché $I_0 = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2-1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad I_4 = \frac{3}{4}\,\frac{\pi^4\,(e^2-1)}{(1+4\pi^2)(1+\pi^2)}$$

(verificata con Wolfram)

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^{10} - 31z^5 - 32 = 0 \,, \qquad w^2|w|^4 = -4(\overline{w})^4 \,.$$

a) Ponendo $z^5 = v$, si ottiene l'eq^{ne} di 2° grado

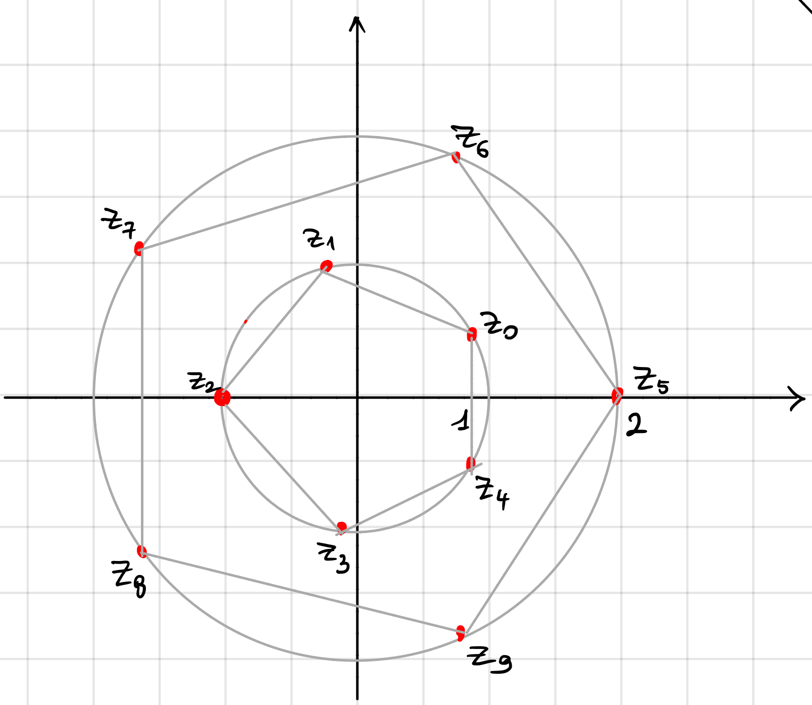
$$v^2 - 31v - 32 = 0$$

che ha come radici $v = -1$ e $v = 32$

Quindi devo risolvere

$$z^5 = -1 = e^{i\pi} \to \begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}} \\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}} \\ z_2 = e^{i\pi} = -1 \\ z_3 = e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_4 = e^{i\frac{9}{5}\pi} \end{cases}$$

$$z^5 = 32 = 32e^0 \to \begin{cases} z_5 = 2e^0 = 2 \\ z_6 = 2e^{i\frac{2}{5}\pi} \\ z_7 = 2e^{i\frac{4}{5}\pi} \\ z = 2e^{i\frac{6}{5}\pi} \\ 9 = 2e^{i\frac{8}{5}\pi} \end{cases}$$



i

b) Posto $w = \rho e^{i\theta}$, l'eq^{ne} diventa:

$$-6\theta = -\pi + 2k\pi$$

$$\rho^6 e^{2i\theta} = 4\rho^4 e^{i(-4\theta+\pi)}$$

$$\theta = +\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$\rho = 0 \Rightarrow w_6 = 0$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$$

$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

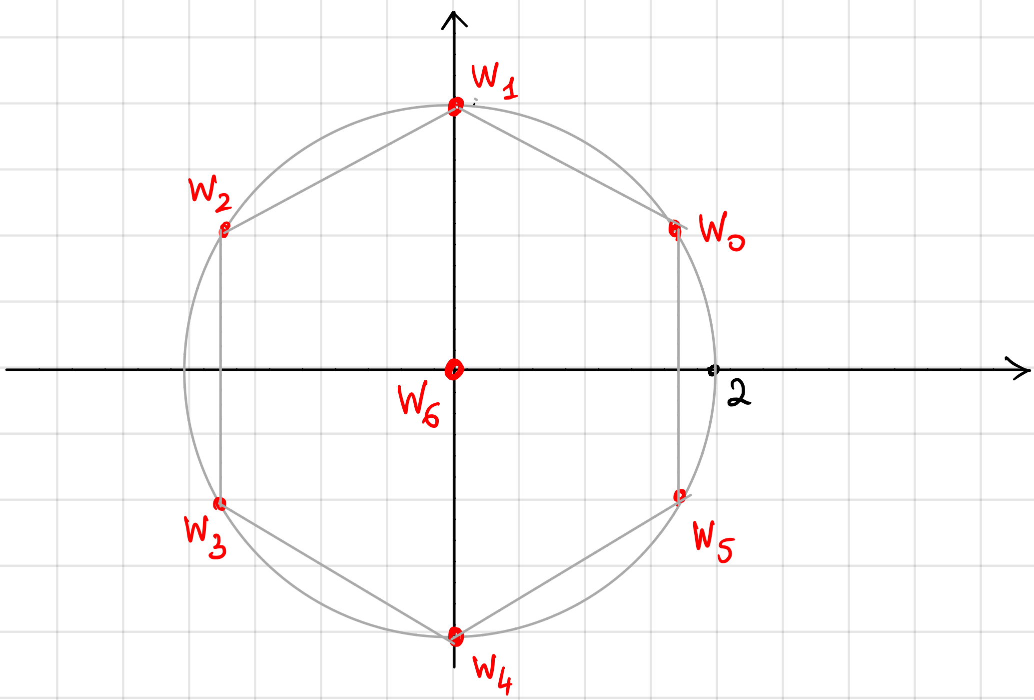
$w_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i$

$w_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3} + i$

$w_3 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$

$w_4 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$

$w_5 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \cos\frac{2}{x} - e^{(x+5)/x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1+x^2} \quad (\text{per } x \to 0^+)\,,$$

$f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$

$$f(x) = \cos\frac{2}{x} - 1 + 1 - e^{\frac{x+5}{x^2}} = \qquad \left[\frac{1}{x} = t \to 0^+\right]$$

$$= \cos(2t) - 1 + 1 - e^{t+5t^2} =$$

$$= t\left(\frac{\cos(2t)-1}{t} + \frac{1-e^{t+5t^2}}{t}\right) \sim -t = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{\cos(2t)-1}{t} \to 0 \qquad \frac{1-e^{t+5t^2}}{t} \sim \frac{-(t+5t^2)}{t} \to -1$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1

$$g(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1+x^2} =$$

OSS si poteva anche usare lo sviluppo di Taylor di $\sqrt{1+t}$

[moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+\sin^2 x} + \sqrt{1+x^2}$]

$$= \frac{\cancel{1} + \sin^2 x - \cancel{1} - x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x} + \sqrt{1+x^2}} \sim \frac{\sin^2 x - x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+\sin^2 x} + \sqrt{1+x^2} \to 2$$

$$= [\text{Taylor}] = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{3} + o(x^4)\right] \sim -\frac{x^4}{6}$$

per $x \to 0$

(infinitesimo di ordine 4)

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\arcsin\frac{3}{n+2}-\frac{\alpha}{n+2}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+5}{n^3(n^2-3^n)}(x^2-4)^n .$$

a) $\arcsin\frac{3}{n+2}-\frac{\alpha}{n+2} \underset{\text{[Taylor]}}{=} \frac{3}{n+2}+\frac{9}{2(n+2)^3}+o\left(\frac{1}{(n+2)^3}\right)-\frac{\alpha}{n+2}$

$$\sim \begin{cases} \frac{3-\alpha}{n+2} \sim \frac{3-\alpha}{n} & \text{se } \alpha \neq 3 \\ \frac{9}{2}\frac{1}{(n+2)^3} \sim \frac{9}{2n^3} & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

Pertanto in ogni caso la serie è definitivamente a segno costante. Per il confronto con la serie armonica:

- diverge a $+\infty$ se $\alpha < 3$
- " a $-\infty$ se $\alpha > 3$
- converge se $\alpha = 3$

b) Ponendo $x^2-4=t$, diventa una serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+5}{n^3(n^2-3^n)}t^n$$

Poiché $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{1}{3}$, il raggio di convergenza della serie vale 3.

Per $t=3$ il termine vale $\frac{(n+5)3^n}{n^3(n^2-3^n)} \sim -\frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La serie converge

Per $t = -2$ la serie vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+5)\,3^n}{n^3(n^2-3^n)}$$

, che converge assolutamente e quindi semplicemente,

in quanto $\left|\dfrac{(n+5)\,3^n}{n^3(n^2-3^n)}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$.

In definitiva la serie converge se e solo se

$$-3 \leq t = x^2-4 \leq 3$$

cioè se e solo se

$$x \in [-\sqrt{7}, -1] \cup [1, \sqrt{7}]$$