Esame di Meccanica Quantistica, 02/02/2021

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin $1/2$, vincolata a muoversi su una sfera di raggio unitario. La particella si trova nello stato specificato dallo spinore normalizzato

$$|\Psi\rangle = A \begin{pmatrix} 3\sin\theta e^{-i\phi} \\ 2e^{i\alpha} \end{pmatrix} ,$$

dove α è un parametro dato ed A la costante di normalizzazione.
a) Si calcoli $|A|$. Se si misura L^2 su $|\Psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?
b) Al tempo $t = 0$ si effettua una misura di J^2 ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$) ottenendo $\frac{3}{4}\hbar^2$. Si scriva lo stato normalizzato $|\psi_1\rangle$ in cui si trova il sistema immediatamente dopo la misura.
c) Lo stato $|\psi_1\rangle$ evolve con Hamiltoniana

$$H = \omega(L_z + 2S_z) + \frac{\omega}{2\hbar}L^2 .$$

Si calcoli la stato $|\psi_1(t)\rangle$ al tempo t ed il valor medio $\langle\psi_1(t)|z/r|\psi_1(t)\rangle$.

Esercizio 2. Si considerino 2 particelle identiche di spin 1 e massa m vincolate a muoversi su un piano. Il sistema è governato dalla seguente hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + V(\hat{x}_1, \hat{y}_1) + V(\hat{x}_2, \hat{y}_2) + \frac{\alpha}{2}\frac{\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2}{\hbar^2}, \tag{1}$$

dove

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} - L/2 < x < L/2, -L/2 < y < L/2 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

e $\hat{\mathbf{S}}_1$ e $\hat{\mathbf{S}}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle e $\alpha = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.
a) Si calcolino i livelli energetici del sistema con energia $E < 8\alpha$ e la relativa degenerazione. Si specifichino i relativi autostati dell'Hamiltoniana.

Si consideri ora la perturbazione $\delta\hat{H} = \delta V(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$

$$\delta V(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta x_1 x_2 & \text{se} - L/2 < x < L/2, -L/2 < y < L/2 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{3}$$

dove $\beta = \epsilon\alpha\pi^4/L^2$ e $0 < \epsilon \ll 1$,
b) Si calcolino le correzioni al primo ordine in ϵ al livello energetico del punto precedente corrispondente ad autostati dell'operatore $\hat{\mathbf{S}}^2$ con autovalore $2\hbar^2$. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Per la risoluzione può essere utile il seguente risultato:

$$\int_{-1/2}^{1/2} x \sin(2\pi x) \cos(\pi x) dx = \frac{8}{9\pi^2} \tag{4}$$

ESERCIZIO 1)

a) Riscriviamo $|\psi\rangle$ in termini di armoniche sferiche

$$|\psi\rangle = A\left(3\sin\theta\, e^{-i\phi}\,|+\tfrac{1}{2}\rangle + 2e^{i\alpha}|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= A\left(3\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^{-1}\,|\tfrac{1}{2}\rangle + 2e^{i\alpha}\sqrt{4\pi}\,Y_0^0\,|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Se $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ allora

$$|A|^2\left(9\cdot\frac{8\pi}{3} + 4\,4\pi\right) = 1$$

$$40\pi|A|^2 = 1 \qquad |A| = \frac{1}{2\sqrt{10\pi}}$$

Scegliamo la fase in modo che $A = \frac{1}{2\sqrt{10\pi}}$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{40\pi}}\left(\sqrt{24\pi}\,Y_1^{-1}\,|\tfrac{1}{2}\rangle + e^{i\alpha}\sqrt{16\pi}\,Y_0^0\,|-\tfrac{1}{2}\rangle\right.$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}}\,|\underset{\substack{\uparrow\\ l}}{1}\ \underset{\substack{\uparrow\\ l_z}}{-1}\ \underset{\substack{\uparrow\\ S_z}}{\tfrac{1}{2}}\rangle + e^{i\alpha}\sqrt{\frac{2}{5}}\,|\underset{\substack{\uparrow\\ l}}{0}\ \underset{\substack{\uparrow\\ l_z}}{0}\ \underset{\substack{\uparrow\\ S_z}}{-\tfrac{1}{2}}\rangle$$

È possible avere $l = 1, 0$

$$\text{Prob}(L^2 = 2\hbar^2) = \frac{3}{5}$$

$$\text{Prob}(L^2 = 0) = \frac{2}{5}$$

b) Passiamo alla base $|L\,S\,J\,J_z\rangle_J$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J\right] \leftarrow \left[\begin{array}{l}\text{tavole}\\ \text{CG } 1\times\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$+\, e^{i\alpha}\sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J \qquad \leftarrow \left[\begin{array}{l}\text{questo è}\\ 0\times\frac{1}{2}\text{: non servono}\\ \text{tavole!}\end{array}\right]$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{misura}} -\sqrt{\frac{2}{5}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J + e^{i\alpha}\sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$\downarrow$ normalizzazione

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J - e^{i\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

NOTA: hanno l diverso

(c) Ripassiamo a stati $|l\, l_z\, S_z\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,-1\,\tfrac{1}{2}\rangle\right] - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\,|0\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,-1\,\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}|0\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$E = \hbar\omega\left(-\frac{2}{2}\right) + \hbar\omega = 0$ $\qquad$ $E = \hbar\omega(-1+1) + \hbar\omega = \hbar\omega$ $\qquad$ $E = \hbar\omega(-1) = -\hbar\omega$

$$|\psi_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\omega t}|1\,-1\,\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|0\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= |\psi_A\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + |\psi_B\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

con
$$\begin{cases} |\psi_A\rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\omega t}|1\,-1\rangle \\[2mm] |\psi_B\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}}|1\,0\rangle - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha+i\omega t}|0\,0\rangle \end{cases}$$

$$\langle\psi_1(t)|\frac{z}{r}|\psi_1(t)\rangle = \langle\psi_A|\frac{z}{r}|\psi_A\rangle + \langle\psi_B|\frac{z}{r}|\psi_B\rangle$$

per l'ortogonalità delle funzioni di spin

Ricordiamo

$$\langle l\,m|\frac{z}{r}|l\,m'\rangle = 0$$ per parità, per ogni l.

Quindi

$$\langle\psi_A|\frac{z}{r}|\psi_A\rangle = \frac{1}{3}\langle 1\,-1|\frac{z}{r}|1\,-1\rangle = 0$$

$$\langle\psi_B|\frac{z}{r}|\psi_B\rangle = \frac{1}{6}\langle 1\,0|\frac{z}{r}|1\,0\rangle + \frac{1}{2}\langle 0\,0|\frac{z}{r}|0\,0\rangle \longrightarrow \text{tutti nulli}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}e^{i\omega t}\right)\langle 1\,0|\frac{z}{r}|0\,0\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\alpha}e^{-i\omega t}\right)\langle 0\,0|\frac{z}{r}|1\,0\rangle$$

Ora

$$\langle 1\,0|\frac{z}{r}|0\,0\rangle = \int d\Omega \cos\theta \, Y_1^{0*} Y_0^0$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos\theta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos\theta \qquad \cos\theta = x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\langle 0\,0|\frac{z}{r}|1\,0\rangle = \langle 1\,0|\frac{z}{r}|0\,0\rangle^* = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

$$\langle \psi_1(t)|\frac{z}{r}|\psi_1(t)\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(e^{i\alpha + i\omega t} + e^{-i\alpha - i\omega t}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(\omega t + \alpha)$$

Esercizio 2

Ciascuna particella è soggetta al potenziale di una buca bidimensionale (problema separabile nelle componenti x e y) e le due particelle non hanno interazioni SPAZIALI. Quindi lo spettro della Hamiltoniana spaziale

$$H_{sp} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1,y_1) + V(x_2,y_2)$$

è

$$E_{n_{1x},n_{1y},n_{2x},n_{2y}} = \alpha(n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{2x}^2 + n_{2y}^2) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{tutti gli } n_i \\ \text{sono } \geq 1\end{array}\right)$$

dove $E = \alpha n^2$ è lo spettro della buca in 1 dimensione.
Le autofunzioni sono

$$|n_{1x}, n_{1y}; n_{2x} n_{2y}\rangle = \psi_{n_{1x} n_{1y} n_{2x} n_{2y}}(x_1 y_1; x_2 y_2)$$

$$= \psi_{n_{1x}}(x_1)\psi_{n_{1y}}(y_1)\psi_{n_{2x}}(x_2)\psi_{n_{2y}}(y_2)$$

dove $\psi_n(x)$ è l'autofunzione della buca 1D con energia αn^2.

n_{1x}	n_{1y}	n_{2x}	n_{2y}		
1	1	1	1		$E = 4\alpha$
2	1	1	1	(e permutazioni)	$E = 7\alpha$
2	2	1	1	(e perm.)	$E = 10\alpha$
3	1	1	1	(e perm.)	$E = 12\alpha$

Termine di spin : $(\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2)$

$$\frac{\alpha}{2\hbar^2}(S_1 \cdot S_2) = \frac{\alpha}{4\hbar^2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) = \frac{\alpha S^2}{4\hbar^2} - \alpha \qquad (S_1^2 = S_2^2 = 2\hbar^2)$$

Lo spin totale può essere 0,1,2

$$\frac{\alpha}{2\hbar^2}\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 = \begin{cases} \alpha/2 & S=2 \\ -\alpha/2 & S=1 \\ -\alpha & S=0 \end{cases}$$

Dato che sono richiesti gli stati con $E<8\alpha$ dobbiamo considerare solo gli stati "spaziali" con $E=4\alpha$ e $E=7\alpha$

Riscriviamoli in modo che abbiano segno definito sotto scambio

$|\psi_0\rangle = |1\,1;1\,1\rangle$ simmetrico $E=4\alpha$

$|\psi_{1S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1;1\,1\rangle + |1\,1;2\,1\rangle\right)$ simm. $E=7\alpha$

$|\psi_{2S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,2;1\,1\rangle + |1\,1;1\,2\rangle\right)$ simm $E=7\alpha$

$|\psi_{1A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1;1\,1\rangle - |1\,1;2\,1\rangle\right)$ antis. $E=7\alpha$

$|\psi_{2A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,2;1\,1\rangle - |1\,1;1\,2\rangle\right)$ antis. $E=7\alpha$

Spettro

- $|\psi_0\rangle|\overset{S}{0}\,\overset{S_z}{0}\rangle$ $E=4\alpha-\alpha=3\alpha$ non deg.
- $|\psi_0\rangle|2\,m\rangle$ $E=4\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{9\alpha}{2}$ deg. 5 (componente S_z)
- $\begin{cases}|\psi_{1S}\rangle|0\,0\rangle \\ |\psi_{2S}\rangle|0\,0\rangle\end{cases}$ $E=7\alpha-\alpha=6\alpha$ deg. 2
- $\begin{cases}|\psi_{1A}\rangle|1\,m\rangle \\ |\psi_{2A}\rangle|1\,m\rangle\end{cases}$ $E=7\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{13}{2}\alpha$ deg: $3\times 2=6$

- $\begin{cases} |\psi_{1S}\rangle\,|2\,m\rangle \\ |\psi_{2S}\rangle\,|2\,m\rangle \end{cases}$ $E = 7\alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{15}{2}\alpha$ deg $5 \times 2 = 10$

(b) Lo spin non gioca nessun ruolo per cui ci basta considerare la perturbazione nel sottospazio generato da $|\psi_{1A}\rangle$ e $|\psi_{2A}\rangle$

Per semplificare il calcolo utilizziamo le proprietà delle autofunzioni sotto inversione spaziale. In 1 dimensione

$$\psi_1(x) \xrightarrow{x \to -x} +\psi_1(x)$$
$$\psi_2(x) \xrightarrow{x \to -x} -\psi_2(x)$$

Definiamo $\psi_a = |2\,1;\,1\,1\rangle$ e $\psi_b = |1\,1;\,2,1\rangle$

per cui $|\psi_{1A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a - \psi_b)$

$$\psi_a \begin{cases} \xrightarrow{x_1 \to -x_1} -\psi_a \\ \xrightarrow{x_2 \to -x_2} +\psi_a \end{cases}$$

$$\psi_b \begin{cases} \xrightarrow{x_1 \to -x_1} +\psi_b \\ \xrightarrow{x_2 \to -x_2} -\psi_b \end{cases}$$

$$\psi_{2A} \begin{cases} \xrightarrow{x_1 \to -x_1} +\psi_{2A} \\ \xrightarrow{x_2 \to -x_2} +\psi_{2A} \end{cases}$$

Da qui segue immediatamente che

$$\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle = \langle \psi_b | x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle =$$
$$= \langle \psi_{2A} | x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | x_1 x_2 | \psi_b \rangle = 0$$

Esempio:

$$\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle = \text{(cambiamo variabile mandando } x_2 \to -x_2)$$

$$= \langle \psi_a | -x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle = -\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_{2A} \rangle \to \quad = 0$$

c'è un solo elemento di matrice che deve essere calcolato

$$\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_b \rangle = \langle 2\,1; 1\,1 | x_1 x_2 | 1\,1; 2\,1 \rangle$$

$$= \langle 2\,1 | \underset{\uparrow \text{ integrale in } (x_1, y_1)}{x_1} | 1\,1 \rangle \langle 1\,1 | \underset{\uparrow \text{ integrale in } (x_2, y_2)}{x_2} | 2\,1 \rangle$$

$$= \langle 2 | \underset{\uparrow \text{ int in } x_1}{x_1} | 1 \rangle \underset{\uparrow \text{ int in } y_1}{\langle 1 | 1 \rangle} \langle 1 | \underset{\uparrow \text{ int in } x_2}{x_2} | 2 \rangle \underset{\uparrow \text{ int in } y_2}{\langle 1 | 1 \rangle}$$

$$= \langle 2 | x | 1 \rangle \langle 1 | x | 2 \rangle = |\langle 1 | x | 2 \rangle|^2$$

unidimensionale

$$\langle 1 | x | 2 \rangle = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, x \cos\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi x}{L} = \frac{16}{9\pi^2} L$$

Quindi

$$\langle \psi_a | x_1 x_2 | \psi_b \rangle = \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{16}{9}\right)^2 L^2 = \text{(hermiticità)} = \langle \psi_b | x_1 x_2 | \psi_a \rangle$$

Calcoliamo ora gli elementi di matrice di V nel sottospazio

$$\langle \psi_{1A} | V | \psi_{1A} \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_a - \psi_b | V | \psi_a - \psi_b \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} \langle \psi_b | V | \psi_a \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle =$$

$$= -\beta \frac{16^2}{81} \frac{L^2}{\pi^4} = -\epsilon \frac{256}{81} \alpha$$

$$\langle \psi_{1A} | V | \psi_{2B} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_{2B} | V | \psi_{2A} \rangle = 0$$

Matrice $\begin{pmatrix} -\epsilon \frac{256}{81} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

I 6 livelli con $S = 1$ si separano in

$$\begin{cases} 3 \text{ livelli con } E = \frac{13}{2}\alpha - \epsilon \frac{256}{81}\alpha & \begin{pmatrix} \text{corrispondono a} \\ S_z = \pm 1, 0 \end{pmatrix} \\ 3 \text{ livelli con } E = \frac{13}{2}\alpha & \begin{pmatrix} \text{corrispondono a} \\ S_z = \pm 1, 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 19/02/2021

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di massa m e spin 1/2 che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = H_0 + \frac{\omega}{8\hbar} J^2 \qquad H_0 = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{4} m\omega^2 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \,,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ lo spin totale e $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ gli operatori di spin delle due particelle. Si studi il problema nel sistema del centro di massa.

a) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: i) una misura di H_0 dà sempre un valore strettamente inferiore a $\frac{7}{2}\hbar\omega$; ii) un misura di J_z dà 0 con certezza; iii) una misura di L^2 fornisce 0 con probabilità 2/5; iv) una misura di L_z fornisce $-\hbar$ con probabilità 3/5.

b) Per tutti gli stati $|\psi\rangle$ trovati, si calcoli il valor medio della Hamiltoniana H e l'evoluto $|\psi(t)\rangle$.

c) Si calcoli il valore medio $\langle\psi(t)|(S_{1,z} - S_{2,z})^2|\psi(t)\rangle$. Suggerimento: si dimostri preliminarmente che gli stati di spin $|SS_z\rangle$ sono autostati di $(S_{1,z} - S_{2,z})^2$ e si calcolino i corrispondenti autovalori.

Esercizio 2. Una particella di spin 1, della quale si possono trascurare i gradi di libertà spaziali, è governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} (S_3 - iS_1)(S_3 + iS_1) \,,$$

dove con S_i sono indicati gli operatori di spin lungo i tre assi cartesiani.

a) Si calcolino i commutatori $[H, S_2]$ e $[H, \mathbf{S}^2]$. Si determinino gli autovalori e i relativi autostati della Hamiltoniana.

b) Sapendo che all'istante $t = 0$ una misura di S_3 fornisce il risultato 0, si determini il vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ al generico tempo $t > 0$ esprimendolo nella base di autostati simultanei di $\mathbf{S}^2$ e S_3. Si calcolino i valori ottenibili da una misura di S_3 al tempo t e le relative probabilità.

Si consideri ora lo stesso sistema perturbato dall'azione di un debole campo magnetico

$$\delta H = -\frac{\omega}{B} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \,, \qquad \mathbf{B} = (0, 0, \epsilon B)$$

con $0 < \epsilon \ll 1$.

c) Si calcolino le correzioni agli autovalori della Hamiltoniana H al primo ordine in ϵ.

Esercizio 1

(a) Notiamo che nel CM la Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{\omega}{8\hbar} J^2 \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \\ \bar{p} = \text{momento coniugato a } \bar{r} \end{array}$$

Per imporre la condizione i) calcoliamo lo spettro di H_0

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \quad \equiv \text{oscillatore isotropo tridimensionale}$$

$n=0$ $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ —— stato non degenere $L=0$ pari sotto parità

$n=1$ $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ —— stato $L=1$ (degenerazione 3 in L_z) dispari sotto parità

$n=2$ $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ non va considerato

Per il principio di Pauli gli stati sono

$$\begin{array}{ll} & n\ \ell\ \ell_z \quad s\ s_z \qquad \leftarrow s \equiv \text{spin totale} \\ E = \frac{3}{2}\hbar\omega & |0\,0\,0\rangle |0\,0\rangle \\ E = \frac{5}{2}\hbar\omega & |1\,1\,m\rangle |1\,S_z\rangle \qquad \left.\begin{array}{l} m = -1,0,1 \\ S_z = -1,0,1 \end{array}\right\} \text{ 9 stati} \end{array}$$

La condizione i) ci dice che si tratta di una combinazione lineare di questi 10 stati

ii) la condizione $J_z = 0$ ci dice che $L_z + S_z = 0$ con certezza. Questo ci permette di escludere gli stati con $m + S_z \neq 0$ per $n=1$ (primo eccitato).

Quindi (i) e (ii) ci dicono

$$|\psi\rangle = a_1 |000\rangle|00\rangle + a_2 \overbrace{|111\rangle|1-1\rangle}^{m+S_z=0} +$$

$$+ a_3 \underbrace{|110\rangle|10\rangle}_{m+S_z=0} + a_4 \underbrace{|11-1\rangle|11\rangle}_{m+S_z=0}$$

La normalizzazione di $\langle\psi|\psi\rangle$ implica

$$|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2=1 \qquad (*)$$

Condizione iii) $|a_1|^2=\frac{2}{5}$

iv) $|a_4|^2=\frac{3}{5}$

Sostituendo in $(*)$

$$\frac{2}{5}+|a_2|^2+|a_3|^2+\frac{3}{5}=1 \qquad |a_2|^2+|a_3|^2=0 \longrightarrow \begin{cases}|a_2|=0\\|a_3|=0\end{cases}$$

Quindi scegliendo a_1 reale positivo abbiamo

$$|\psi\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\,|000\rangle|00\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}\,e^{i\alpha}|11-1\rangle|11\rangle$$

α è un parametro non determinato dalle condizioni

(b) Dobbiamo passare alla base $|n\,L\,S\,J\,J_z\rangle_J$

$$=\sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\,0\,0\,0\,0\rangle_J$$

(Tabelle CG 1×1 / stato $|L_z\,S_z\rangle=|-1\,1\rangle$)

$$+\sqrt{\frac{3}{5}}\,e^{i\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\,|11120\rangle-\sqrt{\frac{1}{2}}\,|11110\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|11100\rangle\right)$$

$$\text{energie}=\begin{cases}|00000\rangle_J & \frac{3}{2}\hbar\omega+0=\frac{3}{2}\hbar\omega\\ |11120\rangle_J & \frac{5}{2}\hbar\omega+\frac{\hbar\omega}{8}\cdot6=\frac{13}{4}\hbar\omega=\frac{3}{2}\hbar\omega+\frac{7}{4}\hbar\omega\\ |11110\rangle_J & \frac{5}{2}\hbar\omega+\frac{\hbar\omega}{8}\cdot2=\frac{11}{4}\hbar\omega=\frac{3}{2}\hbar\omega+\frac{5}{4}\hbar\omega\\ |11100\rangle_J & \frac{5}{2}\hbar\omega=\frac{3}{2}\hbar\omega+\hbar\omega\end{cases}$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\hbar\omega\right)$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega\right)$$

$$= \frac{3}{5}\hbar\omega + \frac{5}{2}\hbar\omega\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}\hbar\omega + \frac{3}{10}\frac{\hbar\omega}{4}$$

$$= \frac{3}{5}\hbar\omega + \frac{\cancel{5}}{2}\hbar\omega\cdot\frac{3}{\cancel{5}} + \frac{3}{20}\hbar\omega = \frac{9}{4}\hbar\omega$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|00000\rangle_J$$

$$+e^{i\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\,e^{-i\frac{7}{4}\omega t}|11120\rangle_J - \sqrt{\frac{3}{10}}\,e^{-i\frac{5}{4}\omega t}|11110\rangle_J\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1}{5}}\,e^{-i\omega t}\,|11100\rangle_J\right)$$

[Fase $e^{-3i\omega t/2}$ omessa]

(c)

$$(S_{1z}-S_{2z})^2\,|\overset{S\ S_z}{1\ 1}\rangle = (S_{1z}-S_{2z})^2\,|\overset{S_{1z}\ S_{2z}}{\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}}\rangle = 0$$

$$(S_{1z}-S_{2z})^2\,|1\,-1\rangle = (S_{1z}-S_{2z})^2\,|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$

$$(S_{1z}-S_{2z})\,|\overset{S\ S_z}{1\ 0}\rangle = (S_{1z}-S_{2z})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \hbar\,|0\,0\rangle$$

$$(S_{1z}-S_{2z})\,|0\,0\rangle = (S_{1z}-S_{2z})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \hbar\,|1\,0\rangle$$

$$(S_{1z}-S_{2z})^2|10\rangle = \hbar^2|10\rangle$$

$$(S_{1z}-S_{2z})^2|00\rangle = \hbar^2|00\rangle$$

Da qui si vede che $\frac{1}{\hbar^2}(S_{1z}-S_{2z})^2$ è il proiettore sugli stati con $S_z=0$. Quindi

$$\langle\psi(t)|(S_{1z}-S_{2z})^2|\psi(t)\rangle =$$

$$= \hbar^2\langle\psi'(t)|\psi'(t)\rangle$$

dove $|\psi'(t)\rangle$ è lo stato ottenuto tenendo solo i termini con $S_z=0$

$$\psi'(t) = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|\overset{n\,\ell\,\ell_z}{000}\rangle|\overset{S\,S_z}{0\,0}\rangle$$

$$+e^{i\alpha}\sqrt{\tfrac{1}{10}}\,e^{-i\frac{7}{4}\omega t}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|110\rangle|10\rangle$$ (dalle tavole 1×1 stato $S_z=0$ da $|\underset{J\,J_z}{2\,0}\rangle$)

$$+e^{i\alpha}\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,e^{i\omega t}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)|110\rangle|10\rangle$$ (stato $S_z=0$ da $|\underset{J\,J_z}{0\,0}\rangle$)

[NOTA: non c'è contributo da $|\underset{J\,J_z}{1\,0}\rangle$]

$$= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|000\rangle|00\rangle +$$

$$+e^{i\alpha}e^{-i\omega t}\sqrt{\tfrac{1}{15}}\left(e^{-\frac{3}{4}i\omega t}-1\right)|110\rangle|10\rangle$$

Quindi $\langle\psi(t)|(S_{1z}-S_{2z})^2|\psi(t)\rangle =$

$$= \hbar^2\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{15}\left|e^{-i\frac{3\omega t}{4}}-1\right|^2\right] = \hbar^2\left[\frac{2}{5}+\frac{2}{15}\left(1-\cos\frac{3\omega t}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{15}\left(8-2\cos\left(\frac{3\omega t}{4}\right)\right) = \frac{2\hbar^2}{15}\left(4-\cos\left(\frac{3\omega t}{4}\right)\right)$$

ALTRO MODO DI TRATTARE $(S_{1z} - S_{2z})^2$

$$(S_{1z} - S_{2z})^2 = S_{1z}^2 + S_{2z}^2 - 2 S_{1z} S_{2z}$$
$$= 2S_{1z}^2 + 2S_{2z}^2 - (S_{1z}^2 + S_{2z}^2 + 2S_{1z}S_{2z})$$
$$= 2S_{1z}^2 + 2S_{2z}^2 - S_z^2$$

Per una particella di spin 1/2 $\quad S_{1z}^2 = S_{2z}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$

Quindi

$$(S_{1z} - S_{2z})^2 = \hbar^2 - S_z^2$$

Segue $\quad (S_{1z} - S_{2z})^2 \,|\overset{S}{1}\ \overset{S_z}{\pm 1}\rangle = 0$

$\quad (S_{1z} - S_{2z})^2 \,|\overset{S}{1}\ 0\rangle = \hbar^2$

$\quad (S_{1z} - S_{2z})^2 \,|0\ 0\rangle = \hbar^2$

Esercizio 2

Riscriviamo la Hamiltoniana come

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left(S_3^2 + S_1^2 - iS_1S_3 + iS_3S_1\right)$$
$$= \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_2^2 + i[S_3, S_1]\right)$$
$$= \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_2^2 + i\,i\hbar S_2\right) = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_2^2 - \hbar S_2\right)$$

(a) H dipende da S^2 e S_2. Quindi $[H, S^2] = [H, S_2] = 0$. Scegliamo la base $|S^2 S_2\rangle_2$

~~Dato~~ Si tratta di autovettori di H. Quindi

$$H|S^2 m\rangle_2 = \hbar\omega\left(2 - m^2 - m\right) = \begin{cases} 0 & m=1 \\ 2\hbar\omega & m=0 \\ 2\hbar\omega & m=-1 \end{cases}$$

Vi sono quindi due livelli

$E = 0$ non degenere $|S^2\, 1\rangle_2$

$E = 2\hbar\omega$ degenerazione 2 $|S^2\, 0\rangle_2, |S^2 -1\rangle_2$

$\Big\}$ autostati di $S_2 = S_y$

(b) Calcoliamo S_2 nella base canonica $|m\rangle$ autovalori di $S_3 = S_z$.

$S_+|1\rangle = 0$
$S_+|0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1\rangle$
$S_-|-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|0\rangle$

Usiamo la rappresentazione

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^\dagger = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S_+ = S_x + i S_y \\ S_- = S_x - i S_y \end{cases} \qquad S_+ - S_- = 2i S_y$$

$$S_y = -\frac{i}{2}\sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che gli autovalori sono $+\hbar, 0, -\hbar$.
Calcoliamo gli autovettori

$S_y = \hbar$

$$S_y|v\rangle = \hbar|v\rangle \Rightarrow -\frac{i}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}} b = a \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}(-a+c) = b \\ \frac{i}{\sqrt{2}} b = c \end{cases} \Rightarrow |v\rangle = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}b, b, \frac{i}{\sqrt{2}}b\right)$$

$$\langle v|v\rangle = |b|^2\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = 2|b|^2$$

Prendiamo $b = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (fase arbitraria scelta per minimizzare il numero di termini immaginari)

$$|v\rangle = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

$S_y = -\hbar$

$$S_y|v\rangle = -\hbar|v\rangle \Rightarrow \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}} b = -a \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}(-a+c) = -b \\ \frac{i}{\sqrt{2}} b = -c \end{cases} \Rightarrow |v\rangle = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}b, b, -\frac{i}{\sqrt{2}}b\right)$$

$$\langle v|v\rangle = 2|b|^2 \qquad b = -\frac{i}{\sqrt{2}} \qquad |v\rangle = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

$S_y = 0$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b=0 \\ -a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \qquad |v\rangle = (a,0,a) \qquad \langle v|v\rangle = |a|^2 \cdot 2 \qquad \Longrightarrow \qquad |v\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi

$$\begin{cases} |+\hbar\rangle_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \\ |0\rangle_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ |-\hbar\rangle_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Autostati di $S_2 = S_y$

A $t=0$ $\quad |\psi\rangle = (0,1,0)$

Scriviamo

$$|\psi\rangle = |+\hbar\rangle_2 \underbrace{{}_2\langle +\hbar|\psi\rangle}_{i/\sqrt{2}} + |0\rangle_2 \underbrace{{}_2\langle 0|\psi\rangle}_{0} + |-\hbar\rangle_2 \underbrace{{}_2\langle -\hbar|\psi\rangle}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|\hbar\rangle_2 - |-\hbar\rangle_2\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[|\hbar\rangle_2 - e^{-2i\omega t}|-\hbar\rangle_2\right]$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}, \frac{i}{\sqrt{2}}(1+e^{2i\omega t}), -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}\right)$$

$$\text{Prob}(S_z=\hbar)=\text{Prob}(S_z=-\hbar)$$

$$=\frac{1}{8}\left|1-e^{-2i\omega t}\right|^2=\frac{1}{4}(1-\cos 2\omega t)=$$

$$\text{Prob}(S_z=0)=\frac{1}{4}\left|1+e^{2i\omega t}\right|^2=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)$$

c)

Lo stato fondamentale è non degenere. Quindi

$$\Delta E={}_2\langle\hbar|-\epsilon\omega S_z|\hbar\rangle_2$$

$$=-\epsilon\omega\hbar\left(\frac{1}{2},\frac{i}{\sqrt2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$=-\epsilon\omega\hbar\left(\frac{1}{2},\frac{i}{\sqrt2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}=-\epsilon\omega\hbar\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0$$

~~Per~~ il primo eccitato dobbiamo considerare la matrice di δH

$$V_{00}={}_2\langle 0|-\epsilon\omega S_z|0\rangle_2=$$

$$=-\epsilon\omega\hbar\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\1/\sqrt2\end{pmatrix}$$

$$=-\epsilon\omega\hbar\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\-1/\sqrt2\end{pmatrix}=-\epsilon\omega\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$V_{11}={}_2\langle-\hbar|-\epsilon\omega S_z|-\hbar\rangle_2=0$$ come per lo stato $|+\hbar\rangle_2$

$$V_{01} = {}_2\langle 0 | -\epsilon\omega S_z | -\hbar \rangle_2$$

$$= -\epsilon\omega\hbar \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= -\epsilon\omega\hbar \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -\epsilon\omega \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = -\frac{\epsilon\omega\hbar}{\sqrt{2}}$$

$$V_{10} = {}_2\langle -\hbar | -\epsilon\omega S_z | 0 \rangle_2 = V_{01}^* = -\frac{\epsilon\omega\hbar}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\epsilon\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\epsilon\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(V - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{\epsilon^2\hbar^2\omega^2}{2} = 0 \qquad \Delta E = \pm \frac{\epsilon\hbar\omega}{\sqrt{2}}$$

Il livello si separa in 2 sottolivelli con energie

$$E = \hbar\omega \left(2 \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \right)$$

UN APPROCCIO EQUIVALENTE PER RISPONDERE A b) e c)

Dato che le autofunzioni di H sono le autofunzioni di S_2 è pure possibile utilizzare una rappresentazione in cui S_2 è diagonale. Ciò si ottiene rappresentando

$$|+\hbar\rangle_2 = (1,0,0) \qquad |0\rangle_2 = (0,1,0) \qquad |-\hbar\rangle_2 = (0,0,1)$$

Per calcolare gli elementi di matrice di S_3 in tale rappresentazione, si può usare l'artificio di far corrispondere $S_2 \to S_z$, $S_3 \to S_x$, $S_1 \to S_y$

Risulta quindi, dal calcolo già fatto di S_+, S_-

$$S_3 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori (corrispondenti agli autovalori $\hbar, 0, -\hbar$) sono

[ATTENZIONE a confrontare i risultati qui ottenuti con quelli precedenti: gli autovettori possono avere fasi diverse]

$$|+\hbar\rangle_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$|0\rangle_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\hbar\rangle_2 - |-\hbar\rangle_2\right)$$ Risultato precedente

$$|-\hbar\rangle_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\hbar\rangle_2 - e^{-2i\omega t}|-\hbar\rangle_2\right)$

Dato che

$${}_3\langle +\hbar|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-2i\omega t}$$

$${}_3\langle 0|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2i\omega t}$$

$${}_3\langle -\hbar|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-2i\omega t}$$

Si ottengono immediatamente le probabilità

$$P(+\hbar) = |{}_{+3}\langle +\hbar|\psi(t)\rangle|^2$$

$$P(-\hbar) = |{}_3\langle -\hbar|\psi(t)\rangle|^2$$

$$P(0) = |{}_3\langle 0|\psi(t)\rangle|^2$$

Per il punto c) gli elementi di matrice si calcolano in modo analogo

$${}_2\langle\hbar|-\epsilon\omega S_z|\hbar\rangle_2 = -\epsilon\hbar\omega\,(1\;0\;0)\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$${}_2\langle 0|-\epsilon\omega S_z|0\rangle_2 = -\epsilon\hbar\omega\,(0\;1\;0)\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$${}_2\langle -\hbar|-\epsilon\omega S_z|-\hbar\rangle_2 = -\epsilon\hbar\omega\,(0\;0\;1)\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$${}_2\langle 0|-\epsilon\omega S_z|-\hbar\rangle_2 = -\epsilon\hbar\omega\,(0\;1\;0)\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon\hbar\omega}{\sqrt{2}}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 30/04/2021

Esercizio 1. Si consideri una particella vincolata a muoversi su un piano e soggetta alla Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}(\omega^2 x^2 + 16\omega^2 y^2).$$

a) Si calcoli lo spettro, indicando, per ciascun livello, la sua degenerazione.
b) Siano $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, i tre autostati (normalizzati) di H con energia più bassa tali che $E_1 < E_2 < E_3$. Sia A un operatore tale che

$$A|1\rangle = 2\alpha|1\rangle + \alpha|3\rangle \qquad A|2\rangle = 2\alpha|1\rangle - \alpha|3\rangle \qquad A|3\rangle = \beta|2\rangle \qquad ,$$

con α e β numeri reali. Si calcoli la matrice associata ad A nel sottospazio generato da $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$. Si specifichi se l'operatore A è associato ad una quantità osservabile (saranno considerate valide solo le risposte motivate in dettaglio).
c) Sia $B = A^\dagger A$ e

$$|\psi\rangle = 3|1\rangle + |2\rangle + i\sqrt{6}|3\rangle\ .$$

Si calcoli $|\psi(t)\rangle$, evoluto di $|\psi\rangle$ al tempo t. Se si effettua una misura di B al tempo t su $|\psi(t)\rangle$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?
d) Si supponga di aggiungere alla Hamiltoniana H una perturbazione ϵB. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale di $H + \epsilon B$, al primo ordine in ϵ.

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 1/2 e massa m vincolata a muoversi su una sfera di raggio R. La dinamica è governata dalla seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2mR^2} + \omega L_z\,,$$

dove L_z è l'operatore di momento angolare orbitale lungo l'asse z e il parametro reale ω è tale che $\omega < \frac{\hbar}{2mR}$.

a) Si determinino autovalori e autostati di H.

b) Uno stato quantistico $|\psi\rangle$ è tale che:
1. una misura di $\mathbf{J}^2$ fornisce con certezza il valore $\frac{15}{4}\hbar^2$;
2. una misura di $\mathbf{L}^2$ fornisce con certezza un valore maggiore di $3\hbar^2$;
3. una misura di J_z fornisce con certezza un valore negativo;
4. il valore di aspettazione del momento angolare orbitale lungo l'asse z è $\langle\psi|L_z|\psi\rangle = -\frac{6}{5}\hbar$.

Con $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ è stato indicato il vettore di operatori associato al momento angolare totale della particella, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.
Si determini l'espressione più generale del vettore di stato.

c) Si determini univocamente lo stato sapendo ulteriormente che il valore di aspettazione $\langle\psi|J_x|\psi\rangle$ assume il valore minimo possibile.

d) Per lo stato determinato al punto precedente, si determini il valore medio del momento angolare orbitale lungo l'asse x al variare del tempo, $\langle\psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle$.

Esercizio 1 ①

a) Il sistema è separabile; la Hamiltoniana è la somma della Hamiltoniana di un oscillatore armonico di pulsazione ω lungo x e di un oscillatore di pulsazione 4ω lungo y. Quindi

$$E = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar(4\omega)\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \hbar\omega n_x + \frac{\hbar\omega}{2} + 4\hbar\omega n_y + 2\hbar\omega$$
$$= \hbar\omega\left(n_x + 4n_y + \frac{5}{2}\right)$$

I livelli sono quindi

$$E = \hbar\omega n + \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \dots \infty$$

Per ogni n il numero di stati degeneri corrisponde al numero di coppie (n_x, n_y) tali che $n_x + 4n_y = n$

Stati $n = 0, 1, 2, 3$ non degeneri $(n, 0) = (n_x, n_y)$

$n = 4, 5, 6, 7$ degenerazione 2
$(n, 0)$ e $(n-4, 1) = (n_x, n_y)$

$n = 8, \dots 11$ deg. 3, $(n,0), (n-4, 1), (n-8, 2)$

$\vdots$

$n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ deg. $k+1$, $k \in \mathbb{N}$

b) Scegliamo la rappresentazione $|1\rangle = (1,0,0)$
$|2\rangle = (0,1,0)$
$|3\rangle = (0,0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

A non è hermitiana
$\Downarrow$
non è osservabile

c) Calcoliamo l'operatore (hermitiano/osservabile) B ②

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & \alpha \\ 2\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{+}A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & \alpha \\ 2\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha^2 & 3\alpha^2 & 0 \\ 3\alpha^2 & 5\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

Lo stato $|\psi\rangle$ non è normalizzato. Normalizziamolo

$$\langle\psi|\psi\rangle = 9+1+6 = 16$$

Lo stato normalizzato è

$$|\psi\rangle = \frac{3}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}|2\rangle + \frac{i\sqrt{6}}{4}|3\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{3}{4}e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle + \frac{1}{4}e^{-iE_2 t/\hbar}|2\rangle + \frac{i\sqrt{6}}{4}e^{-iE_3 t/\hbar}|3\rangle$$

$$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad E_2 = \frac{7}{2}\hbar\omega = E_1 + \hbar\omega \qquad E_3 = \frac{9}{2}\hbar\omega = E_1 + 2\hbar\omega$$

Quindi

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-iE_1 t/\hbar}}_{\text{fase eliminabile}}\left[\frac{3}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}e^{-i\omega t}|2\rangle + \frac{i\sqrt{6}}{4}e^{-2i\omega t}|3\rangle\right]$$

Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare autovalori ed autovettori di B

$$\det(B-\lambda I) = (\beta^2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 5\alpha^2-\lambda & 3\alpha^2 \\ 3\alpha^2 & 5\alpha^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\beta^2-\lambda)\left[(5\alpha^2-\lambda)^2 - 9\alpha^4\right]$$

$$= (\beta^2-\lambda)(8\alpha^2-\lambda)(2\alpha^2-\lambda) \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2\alpha^2 \\ 8\alpha^2 \\ \beta^2 \end{cases}$$

autovettore $\lambda = 2\alpha^2$

$$\begin{pmatrix} 5\alpha^2 & 3\alpha^2 & 0 \\ 3\alpha^2 & 5\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\alpha^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\alpha^2 a + 3\alpha^2 b = 2\alpha^2 a \\ 3\alpha^2 a + 5\alpha^2 b = 2\alpha^2 b \\ \beta^2 c = 2\alpha^2 c \end{cases} \quad \begin{matrix} \longrightarrow a+b=0 \\ \\ \longrightarrow c=0 \end{matrix}$$

[α e β sono generici]

$$|2\alpha^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right)$$

autovettore $\lambda = 8\alpha^2$

$$\begin{pmatrix} 5\alpha^2 & 3\alpha^2 & 0 \\ 3\alpha^2 & 5\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 8\alpha^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5\alpha^2 a + 3\alpha^2 b = 8\alpha^2 a \\ 3\alpha^2 a + 5\alpha^2 b = 8\alpha^2 b \\ \beta^2 c = 8\alpha^2 c \end{cases} \quad \begin{matrix} a-b=0 \\ \\ \longrightarrow c=0 \end{matrix}$$

$$|8\alpha^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

autovettore $\lambda = \beta^2$ $\qquad |\beta^2\rangle = |3\rangle$

[La formula vale solo se ~~[illegible]~~ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$]

Quindi

$$\text{Prob}\,(B = 8\alpha^2) = \left|\langle\psi|8\alpha^2\rangle\right|^2$$

$$= \left| \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{32}\left|3 + e^{i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{32}\left(9 + 1 + 6\cos\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(5 + 3\cos\omega t\right)$$

$$\text{Prob}\,(B = 2\alpha^1) = |\langle\psi|2\alpha^2\rangle|^2$$
$$= \left|\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}e^{i\omega t}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{16}(5 - 3\cos\omega t)$$

$$\text{Prob}\,(B = \beta^1) = |\langle\psi|\beta^2\rangle|^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

d)

$$E_{SF} = E_1 + \langle 1|B|1\rangle\epsilon$$
$$= \frac{5}{2}\hbar\omega + 5\alpha^2\epsilon$$

NOTA PUNTO c)

Non è a priori necessario normalizzare $|\psi\rangle$.
In questo caso va usata la formula

$$\text{Prob}\,(B = \lambda) = \frac{|\langle\psi|\lambda\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

che si applica se $|\psi\rangle$ non è normalizzata.

Esercizio 2

(a) Scegliamo stati $Y_\ell^m(\theta,\varphi)|s_z\rangle = |\ell\ \ell_z\ s_z\rangle_{LS}$

$$E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\ell(\ell+1) + \hbar\omega m \qquad m = \ell_z$$

Non vi sono degerazioni per la parte spaziale

Quindi i livelli corrispondono a

$$|\ell\ m\ +\tfrac{1}{2}\rangle_{LS},\ |\ell\ m\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \qquad \text{deg. } 2$$

Livelli più bassi

$|0\,0\ s_z\rangle_{LS}$ $\quad E = 0$

$|1\,{-1}\ s_z\rangle_{LS}$ $\quad E = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \hbar\omega$

$|1\,0\ s_z\rangle_{LS}$ $\quad E = \frac{\hbar^2}{mR^2}$

$|1\,1\ s_z\rangle_{LS}$ $\quad E = \frac{\hbar^2}{mR^2} + \hbar\omega$

(b)

- La condizione 1. implica $J = 3/2$

Dato che $\bar{J} = \bar{L} + \bar{S}$ e $S = 1/2$, abbiamo necessariamente $L = 1$ oppure $L = 2$

- La condizione 2 implica $L = 2$

La condizione 3 implica che J_z può assumere i valori $J_z = -3/2$ e $-1/2$ dato che $J = 3/2$

Quindi

$$|\psi\rangle = a\,|\overset{L}{2}\ \overset{J}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{J_z}{-\tfrac{1}{2}}\rangle + b\,|\overset{L}{2}\ \overset{J}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{J_z}{-\tfrac{3}{2}}\rangle$$

Imponiamo la normalizzazione

$$|a|^2+|b|^2=1$$

Imponiamo ora la condizione 4

Passiamo alla base $|L\ L_z\ S_z\rangle_{LS}$ [tabelle $2\times\frac{1}{2}$]

$$|\psi\rangle = a\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\,|2\ 0\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{3}{5}}\,|2\ -1\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}\right]$$

$$+b\left[\sqrt{\frac{1}{5}}\,|2\ -1\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{4}{5}}\,|2\ -2\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}\right]$$

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \frac{2}{5}|a|^2\cdot 0 + \frac{3}{5}|a|^2(-\hbar) + \frac{1}{5}|b|^2(-\hbar) + \frac{4}{5}|b|^2(-2\hbar)$$

$$= \frac{\hbar}{5}(-1)\left[3|a|^2+|b|^2+8|b|^2\right]$$

Quindi

$$\begin{cases} |a|^2+|b|^2=1 \\ -\frac{\hbar}{5}\left(3|a|^2+9|b|^2\right) = -\frac{6}{5}\hbar \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a|^2+|b|^2=1 \\ |a|^2+3|b|^2=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |a|^2=1/2 \\ |b|^2=1/2 \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|2\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\rangle$$

La fase α è arbitraria

(c) $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$

$$J_+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\hbar \,|2\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{3}\hbar}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}\, |2\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\langle\psi|J_+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\hbar e^{i\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar e^{i\alpha}$$

$$\langle\psi|J_-|\psi\rangle = \langle\psi|J_+|\psi\rangle^* = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar e^{-i\alpha}$$

$$\langle\psi|J_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\right)\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\cos\alpha$$

Minimo per $\alpha = \pi$. Lo stato ψ è quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\rangle$$

d) Ritorniamo alla base $|L\ L_z\ S_z\rangle$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|2\ 0\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{3}{10}}\,|2\ -1\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{10}}|2\ -1\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \sqrt{\frac{2}{5}}\,|2\ -2\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

Le energie dei 4 stati sono nell'ordine

$$\frac{3\hbar^2}{mR^2},\quad \frac{3\hbar^2}{mR^2} - \hbar\omega,\quad \frac{3\hbar^2}{mR^2} - \hbar\omega,\quad \frac{3\hbar^2}{mR^2} - 2\hbar\omega$$

eliminabile

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-it\frac{3\hbar}{mR^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{5}}|2\ 0\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{3}{10}}\,e^{-i\omega t}|2\ -1\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{10}}e^{-i\omega t}|2\ -1\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \sqrt{\frac{2}{5}}\,e^{-2i\omega t}|2\ -2\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}\right]$$

Ora $\quad L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$$L_-|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{6}\hbar\,|2\ -1\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{10}}\,e^{-i\omega t}\,2\hbar|2\ -2\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}\,e^{-i\omega t}\,2\hbar|2\ -2\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$\langle\psi|L_-|\psi\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}e^{i\omega t}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{6}\,\hbar$$

$$+\sqrt{\frac{2}{5}}\,e^{2i\omega t}\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\,e^{-i\omega t}\,2\hbar\right)$$

$$= -\hbar\sqrt{\frac{3}{25}}\,e^{i\omega t} - 2\hbar\sqrt{\frac{3}{25}}\,e^{i\omega t} = -3\hbar\sqrt{\frac{3}{25}}\,e^{i\omega t}$$

$$\langle\psi|L_+|\psi\rangle = \langle\psi|L_-|\psi\rangle^* = -3\hbar\sqrt{\frac{3}{25}}\,e^{-i\omega t}$$

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = -3\hbar\sqrt{\frac{3}{25}}\cos\omega t$$

Esame di Meccanica Quantistica, 21/05/2021

Esercizio 1. Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}[S^2 + (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})^2] \, ,$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ gli operatori di spin delle due particelle, e $\boldsymbol{n}$ è il versore di componenti $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

a) Si calcoli lo spettro specificando la degenerazione di ciascun livello. Per i due livelli di energia più bassa si scrivano gli autostati di H nella base $|s s_z\rangle$ formata dagli autovettori di S^2 e S_z.

b) Al tempo $t = 0$, il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che: (i) una misura di energia fornisce con certezza un valore inferiore a $\frac{5}{2}\hbar\omega$; (ii) la probabilità di ottenere 0 in una misura di S^2 è pari a 1/3. Si scrivano tutti gli stati possibili come combinazione lineare degli autostati $|s s_z\rangle$. Si calcoli il valor medio di H su tali stati.

c) Si calcoli l'evoluto temporale degli stati calcolati al punto b). Al tempo $t_c = 3\pi/(4\omega)$ viene fatta una misura di S_z ottenendo 0. Per tutti gli stati individuati al punto b), si calcoli lo stato $|\psi_1\rangle$ ottenuto dopo la misura.

d) Se, immediatamente dopo la misura di S_z, viene fatta una misura di S_{2z} su $|\psi_1\rangle$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

Esercizio 2. Due particelle *indistinguibili* di massa m e spin 1/2 interagiscono tramite la seguente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + 4\alpha^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + \alpha^\delta \hbar^\beta m^\gamma \, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \tag{1}$$

con $\alpha > 0$ e β, γ, δ parametri reali.

a) Si determinino gli esponenti β, γ e δ utilizzando l'analisi dimensionale.

b) Nel sistema di riferimento del centro di massa, si determino autovalori e autostati di H_0. Si esprimano i valori delle energie in unità di $\hbar\omega$, dove $\omega \equiv \frac{2\alpha}{\sqrt{m}}$

c) Per lo stato fondamentale $|\psi_0\rangle$, si calcoli il valor medio della distanza relativa tra le due particelle, $\langle\psi_0|\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\,|\psi_0\rangle$.

d) Il sistema viene perturbato dal seguente potenziale:

$$V = \lambda \frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + \hbar J_z\right) \, , \tag{2}$$

con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, dove $\mathbf{S}$ è lo spin totale ed $\mathbf{L}$ è il momento angolare orbitale del sistema. Se $0 < \lambda \ll 1$, si calcolino le correzioni alle energie del livello fondamentale e dei primi due livelli eccitati al primo ordine in λ. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione dei livelli energetici.

e) Si calcolino i commutatori $[H_0 + V, J_z]$ e $[H_0 + V, \mathbf{J}^2]$. In base al risultato ottenuto, si stabilisca se le correzioni calcolate al punto precedente forniscono il risultato esatto.

Problema 1

(a)

Trattandosi di due particelle di spin 1/2, $S=0,1$.
$\bar{S}\cdot\bar{n}$ è la componente di $\vec{S}$ lungo $\bar{n}$ e quindi i suoi autovalori sono $\hbar m$; $(m=\pm1,0)$ se $S=1$ e $m=0$ se $S=0$.

Quindi lo spettro è dato da

			S $S\cdot n$	
$E=0$	$S=0$	$S\cdot n=0$	$\|0\ \ 0\rangle$	non deg.
$E=2\hbar\omega$	$S=1$	$S\cdot n=0$	$\|1\ \ 0\rangle$	non deg.
$E=3\hbar\omega$	$S=1$	$S\cdot n=\pm1$	$\|1\ \pm1\rangle$	degenere 2 volte

Dobbiamo ora calcolare gli autostati.

(a) $E=0$. L'autostato è $\underset{S\ S_z}{|0\ 0\rangle} = |E=0\rangle$

(b) $E=2\hbar\omega$. Dobbiamo calcolare l'autostato di $\bar{S}\cdot\bar{n}$ con autovalore nullo nel sottospazio con $S=1$.

Nella base $\{\underset{S\ S_z}{|1\ 1\rangle}, |1\ 0\rangle, |1\ -1\rangle\}$

$$S_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$S_+=\hbar\begin{pmatrix}0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt2\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad S_-=S_+^\dagger=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt2&0&0\\0&\sqrt2&0\end{pmatrix}$$

$$S_x=\hbar\begin{pmatrix}0&\sqrt2/2&0\\\sqrt2/2&0&\sqrt2/2\\0&\sqrt2/2&0\end{pmatrix}$$

$$\bar{S}\cdot\bar{n}=\hbar\begin{pmatrix}1/\sqrt2&\frac12&0\\1/2&0&1/2\\0&1/2&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

[Come controllo è utile verificare che gli autovalori della matrice sono 1,0,-1]

Vogliamo quindi trovare lo stato

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = -\frac{b}{\sqrt{2}} \\ c = \frac{b}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$v = \left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, b, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\langle v|v\rangle = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2 = 1 \qquad |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi

$$|2\hbar\omega\rangle = -\frac{1}{2}|1\ 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ 0\rangle + \frac{1}{2}|1\ -1\rangle$$

b)

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\underbrace{|E=0\rangle}_{\text{spin }0} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\underbrace{|E=2\hbar\omega\rangle}_{\text{spin }1} e^{i\alpha}$$

α è una fase arbitraria

c)

$$|\psi\, t\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|E=0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\alpha}e^{-2i\omega t}|E=2\hbar\omega\rangle$$

Dobbiamo riscrivere lo stato nella base $|S\, S_z\rangle$

$$|\psi\, t\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\alpha - 2i\omega t}\left[-\frac{1}{2}|1\ 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ 0\rangle + \frac{1}{2}|1\ \bar{1}\rangle\right]$$

Al tempo $t_c = \frac{3\pi}{4\omega}$ $\quad e^{-2i\omega t_c} = e^{-\frac{3\pi i}{2}} = i$ (3)

per cui

$$|\psi\, t_c\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\,0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\alpha}\left[-\frac{1}{2}|1\,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle + \frac{1}{2}|1\,-1\rangle\right]$$

Dopo la misura

$$|\psi'\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\,0\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}\,e^{i\alpha}\,|1\,0\rangle$$

Lo stato non è normalizzato: $\langle\psi'|\psi'\rangle = \frac{2}{3}$

Quindi

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|1\,0\rangle$$

d) Dobbiamo passare alla base $|S_{1z}\, S_{2z}\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle\right) + \frac{i}{2}e^{i\alpha}\left(|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + ie^{i\alpha}\right)|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2}\left(-1 + ie^{i\alpha}\right)|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\text{prob}\left(S_{2z} = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4}\left|-1 + ie^{i\alpha}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(-1 + ie^{i\alpha}\right)\left(-1 - ie^{-i\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 1 - ie^{i\alpha} + ie^{-i\alpha}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + 2\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\alpha\right)$$

$$\text{Prob}\left(S_{2z} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4}\left|1 + ie^{i\alpha}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sin\alpha\right)$$

ESERCIZIO 2

a) Calcoliamo le dimensioni fisiche delle diverse quantità

$$[\hbar] = [q][p] = [L^2 T^{-1} M]$$

$$[S] = [\hbar] = [L^2 T^{-1} M]$$

Le dimensioni di α le ricaviamo imponendo che $\alpha^2 (r_1 - r_2)^2$ sia un energia

$$[\alpha]^2 [L]^2 = [E] = [L^2 T^{-2} M] \qquad [\alpha] = [T^{-1} M^{1/2}]$$

Il termine che contiene $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$ deve avere le dimensioni di una energia. Quindi

$$[\alpha]^\delta [\hbar]^\beta [M]^\gamma [\hbar]^2 = [E]$$

$$[T^{-\delta} M^{\delta/2} L^{2\beta} T^{-\beta} M^\beta M^\gamma L^4 T^{-2} M^2] = [L^2 T^{-2} M]$$

Quindi

$$\begin{cases} [T]: & -\delta - \beta - 2 = -2 \\ [L]: & 2\beta + 4 = 2 \\ [M]: & \delta/2 + \beta + \gamma + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -\delta + 1 - 2 = -2 \qquad \delta = 1$$

$$2\beta + 4 = 2 \rightarrow \beta = -1$$

$$\downarrow$$

$$1/2 - 1 + \gamma + 2 = 1 \rightarrow \gamma = -1/2$$

Quindi

$$\alpha^\delta \hbar^\beta m^\gamma \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{\alpha}{\hbar\sqrt{m}} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$$

b) Nel sistema del CM, $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$, $\bar{p}$ è l'impulso coniugato ad $\bar{r}$, $\mu = m/2$

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + 4\alpha^2 r^2 + \frac{\alpha}{\hbar\sqrt{m}} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \qquad \text{Posto} \quad \alpha = \frac{\sqrt{m}\,\omega}{2}$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + m\omega^2 r^2 + \frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu (2\omega)^2 r^2 + \frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(2\omega)^2 r^2 + \frac{\omega}{4\hbar}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) \qquad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(2\omega)^2 r^2 + \frac{1}{4}\hbar\omega\left(\frac{S^2}{\hbar^2} - \frac{3}{2}\right). \qquad S_1^2 = S_2^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

La parte spaziale corrisponde ad un oscillatore armonico isotropo di massa μ e pulsazione 2ω

$$E = \hbar(2\omega)\left(n + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega(2n+3)$$

I livelli con n pari sono pari sotto parità con n dispari sono dispari sotto parità.

Pauli: stati con n pari hanno $S=0$
n dispari hanno $S=1$

<u>n pari</u>: 0, 2, 4, ..

$$E = \hbar\omega(2n+3) - \frac{3}{8}\hbar\omega$$

Autofunzioni : $|n_x\, n_y\, n_z\rangle |S=0 \underset{S_z}{0}\rangle \qquad n_x + n_y + n_z = n$

n dispari : 1, 3, 5. . .

$$E = \hbar\omega(2n+3) + \frac{\hbar\omega}{8}$$

Autofunzioni $|n_x\, n_y\, n_z\rangle |S=1\; m\rangle \qquad m = -1, 0, 1 \quad n_x + n_y + n_z = n$

Livelli con energia più bassa

$n=0 \qquad E = \hbar\omega\left(3 - \frac{3}{8}\right) = \frac{21}{8}\hbar\omega \qquad |000\rangle|00\rangle$ non deg.

$n=1 \qquad E = \hbar\omega\left(5 + \frac{1}{8}\right) = \frac{41}{8}\hbar\omega \qquad \begin{cases} |100\rangle\,|1\,m\rangle \\ |010\rangle\,|1\,m\rangle \\ |001\rangle\,|1\,m\rangle \end{cases}$ deg: $3\times 3 = 9$

$n=2$

$$E = \hbar\omega\left(7 - \frac{3}{8}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} n_x\, n_y\, n_z \\ |2\,0\,0\rangle \\ |0\,2\,0\rangle \\ |0\,0\,2\rangle \\ |1\,1\,0\rangle \\ |0\,1\,1\rangle \\ |1\,0\,1\rangle \end{array}\right\} \times \underset{S\; S_z}{|0\,0\rangle} \qquad \text{deg.}: 6$$

c) Lo stato fondamentale è

$$\underset{S\;S_z}{|000\rangle|0\,0\rangle} = \psi_0 \chi_0 \qquad \psi_0 = \left(\frac{\mu\Omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\mu\Omega r^2/2\hbar}$$

[oscillatore di massa $\mu = \frac{m}{2}$
e pulsazione $\Omega = 2\omega$]

$$\boxed{\mu\Omega = m\omega}$$

Dato che $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

$$\langle \psi_0\chi_0 \| r \| \psi_0\chi_0\rangle = \langle \psi_0 | r | \psi_0\rangle$$

$$= \int d^3r\, r \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{-m\omega r^2/\hbar} =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2\, r\, e^{-m\omega r^2/\hbar} \qquad \xi = r\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \int_0^\infty d\xi\, \xi^3 e^{-\xi^2}$$

Questo integrale può essere calcolato in vari modi

(a) per parti

$$\int_0^\infty d\xi\, \xi^3 e^{-\xi^2} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty d\xi\, \xi^2 \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi^2} \frac{d}{d\xi}\xi^2 = \qquad \text{(termini di bordo} = 0)$$

$$= \int_0^\infty d\xi\, \xi e^{-\xi^2} = -\frac{1}{2} e^{-\xi^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(b) utilizzando la Γ di Eulero

Definiamo $\xi = \sqrt{x}$ $\quad d\xi = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\int_0^\infty d\xi\, \xi^3 e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} x^{3/2} e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, x^{2-1} e^{-x} = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2} 1! = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\langle \psi_0 \chi_0 | |r_1 - r_2| \psi_0 \chi_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

d) Per rispondere alla domanda, bisogna innanzitutto riscrivere gli stati nella base $|n\, l\, l_z\rangle$

$$\begin{array}{lll} & \;\; n\; l\; l_z \;\; s\; s_z & \\ n=0 & |0\,0\,0\rangle|0\,0\rangle & \\ n=1 & |1\,1\,m\rangle|1\,s_z\rangle & \begin{cases} m = -1,0,1 \\ s_z = -1,0,1 \end{cases} \quad 9 \text{ stati} \\ n=2 & \begin{cases} |2\,2\,m\rangle|0\,0\rangle \\ |2\,0\,0\rangle|0\,0\rangle \end{cases} & m = -2,-1,0,1,2 \quad 6 \text{ stati} \end{array}$$

A questo punto possiamo cambiare ulteriormente base passando alla base $|n\, l\, s\, J\, J_z\rangle$ in cui la perturbazione è diagonale

i) Stato fondamentale $(n=0)$

Ha $L=0$ $\quad S=0 \implies J=0$

non vi sono correzioni perturbative

ii) I eccitato $(n=1)$

Ha $L=1$, $S=1 \longrightarrow \begin{cases} J=2 \\ J=1 \\ J=0 \end{cases}$

$$\Delta E = \lambda\hbar\omega(6+m) \qquad m=-2,\dots,2 \qquad \overset{n\ \ell\ s\ J\ J_z}{|1\ 1\ 1\ 2\ m\rangle}$$

$$\Delta E = \lambda\hbar\omega(2+m) \qquad m=-1,0,1 \qquad |1\ 1\ 1\ 1\ m\rangle$$

$$\Delta E = 0 \qquad |1\ 1\ 1\ 0\ 0\rangle$$

La degenerazione è completamente rimossa:
Il livello si separa in 9 livelli con
$\Delta E = \lambda\hbar\omega k \qquad k: 0,1\dots,8$

iii) II eccitato $(n=2)$

Ha $\begin{matrix} L=0 & S=0 \longrightarrow J=0 \\ L=2 & S=0 \longrightarrow J=2 \end{matrix}$

$$\Delta E = \lambda\hbar\omega(6+m) \qquad m=-2,\dots 2 \qquad \overset{n\ \ell\ s\ J\ J_z}{|2\ 2\ 0\ 2\ m\rangle}$$

$$\Delta E = 0 \qquad |2\ 0\ 0\ 0\ 0\rangle$$

La degenerazione è completamente rimossa

e) La parte spaziale è invariante per rotazione:
commuta con $L^2, L_z, J^2, J_z, S^2, S_z$
La parte di spin dipende solo da S^2:
commuta con $S^2, S_z, J^2, J_z, L^2, L_z$

I due commutatori sono nulli
Il risultato al punto d) è esatto.

Esame di Meccanica Quantistica, 30/06/2021 P

Esercizio 1. Si considerino due particelle indistinguibili di spin 1/2 e massa m, vincolate a muoversi su una retta, che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\omega}{2\hbar}(S^2 + \hbar S_y)$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ gli operatori di spin delle due particelle,

a) Si calcolino l'energia e la degenerazione dei due livelli di energia più bassa. Per ciascuno dei due livelli si specifichi una base, esprimendola in termini delle autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale e delle autofunzioni $|ss_z\rangle$ di S^2 e S_z.

b) Al tempo $t = 0$, il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che: (i) una misura di energia fornisce con certezza un valore inferiore a $\frac{5}{4}\hbar\omega$; (ii) una misura di S^2 fornisce con certezza valori strettamente positivi; (iii) il valor medio dell'energia è $\frac{9}{10}\hbar\omega$. Si scrivano tutti gli stati compatibili con queste tre condizioni.

c) Si calcoli l'evoluto temporale degli stati calcolati al punto b). Per tutti gli stati si calcoli il valor medio (indicato con M) di $x_1 x_2 S_z$. Sia ψ_1 lo stato per cui M è minimo al tempo $t = 2\pi/\omega$.

d) Per lo stato ψ_1 quale è la probabilità di trovare le due particelle con componente z dello spin allineata ($S_{1z} = S_{2z} = \hbar/2$ oppure $S_{1z} = S_{2z} = -\hbar/2$)?

Esercizio 2. Una particella è vincolata a muoversi in una dimensione all'interno di una buca di potenziale infinita nel segmento $|x| \leq L/2$. All'istante $t = 0$ lo stato quantistico è caratterizzato dalla seguente funzione d'onda:

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \begin{cases} N & |x| \leq L/4 \\ 0 & |x| > L/4 \end{cases} \tag{1}$$

dove N è una costante di normalizzazione indipendente da x.

1. Si determinino la costante di normalizzazione N, il valor medio degli operatori $\hat{x}$, $\hat{x}^2$ e della dispersione $(\Delta\hat{x})^2$.

2. Si rappresenti graficamente le densità di probabilità relativa ad una misura di impulso.

3. Si determini la funzione d'onda della particella al tempo $t > 0$ e la probabilità P_n che una misura dell'energia al tempo t dia come risultato l'n-esimo autovalore dell'Hamiltoniana.

4. Si consideri ora la seguente perturbazione:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq L/4 \\ 0 & |x| > L/4 \end{cases} \tag{2}$$

   dove V_0 è una costante positiva. Si determinino le correzioni agli autovalori dell'energia al primo ordine in teoria delle perturbazioni. Si calcoli inoltre la correzione all'autofunzione dello stato fondamentale al primo ordine.

ESERCIZIO 1

a)

Parte spaziale: si tratta di due oscillatori armonici in 1D. Quindi lo spettro è $E_{n_1 n_2} = \hbar\omega(n_1+n_2+1)$ e autofunzioni $|n_1\rangle_1 |n_2\rangle_2$. Scriviamo una base formata da autofunzioni dell'operatore di scambio

$E = \hbar\omega$ $\quad |0\rangle_1|0\rangle_2$ $\quad$ non deg.

$$E = 2\hbar\omega \quad \begin{cases} \phi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2) \\ \phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2) \end{cases} \quad \text{deg. } 2$$

$$E = 3\hbar\omega \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|2\rangle_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|2\rangle_2) \\ |1\rangle_1|1\rangle_2 \end{cases} \quad \text{deg. } 3$$

Consideriamo ora la parte di spin. S può solo essere 0 o 1 e quindi

$S = 0 \qquad E_S = 0$

$$S = 1 \qquad E_S = -\frac{\omega}{2\hbar}\hbar^2(2+S_y) = -\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{2}S_y = \begin{cases} -\frac{3}{2}\hbar\omega & S_y = 1 \\ -\hbar\omega & S_y = 0 \\ -\frac{1}{2}\hbar\omega & S_y = -1 \end{cases}$$

Per il principio di Pauli, stati (spaziali) pari hanno $S=0$, stati (spaziali) dispari hanno $S=1$. Spettro di H:

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \phi_a |\overset{S^2}{1}\ \overset{S_y}{1}\rangle_y \qquad \text{non degenere}$$

$$E = \hbar\omega \qquad \begin{cases} |0\rangle_1|0\rangle_2|\overset{S^2}{0}\ \overset{S_y}{0}\rangle_y \\ \phi_a|1\ 0\rangle_y \end{cases} \qquad \text{deg. } 2$$

Lo stato successivo ha $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

②

Per rispondere alla seconda parte della domanda dobbiamo ora esprimere $|11\rangle_y, |10\rangle_y, |00\rangle_y$ nella base $|s\, s_z\rangle_z$. Per lo spin 0 vale

$$|0\,0\rangle_y = |0\,0\rangle_z$$

Per calcolare l'espressione degli altri due stati calcoliamo la matrice S_y per $S=1$ nella base $|s\, s_z\rangle$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S_+ = S_x + i S_y \\ S_- = S_x - i S_y \end{cases} \longrightarrow \qquad S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

[base $|s\, s_z\rangle$ con corrispondenza $|11\rangle_z = (1,0,0)$ $|1-1\rangle_z = (0,0,1)$ $|10\rangle_z = (0,1,0)$]

Calcoliamo $|1\,1\rangle_y$

$$\frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2i}\sqrt{2}\, b = a \\ \frac{1}{2i}(-\sqrt{2}a + \sqrt{2}c) = b \\ \frac{1}{2i}(-\sqrt{2}\, b) = c \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{i}{\sqrt{2}} b \\ c = \frac{i}{\sqrt{2}} b \end{cases}$$

$$v = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}b,\ b,\ \frac{i}{\sqrt{2}}b\right) \qquad |v|^2 = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2$$

$$|b| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{fase scelta arbitrariamente}\right)$$

$$v = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right>$$

$$|1 1\rangle_y = \frac{1}{2}|1 1\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}}|1 0\rangle_z - \frac{1}{2}|1 -1\rangle_z$$

Calcoliamo $|1 0\rangle_y$

$$\frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2i}\sqrt{2}\, b = 0 \\ \frac{1}{2i}\left(-\sqrt{2}a + \sqrt{2}c\right) = 0 \\ \frac{1}{2i}\sqrt{2}(-b) = 0 \end{cases}$$

$b = 0$

$a = c$

$v = (a, 0, a)$

$|v|^2 = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2 \Rightarrow |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|1 0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1 1\rangle_z + |1 -1\rangle_z\right)$$

(b)

Requisito i): lo stato è combin. lineare dei tre stati che appartengono ai primi 2 livelli

ii) non c'è lo stato $|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\, 0\rangle_y$

$$|\psi\rangle = \alpha\, \phi_a |1 1\rangle_y + \beta\, \phi_a |1 0\rangle_y$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ per normalizzazione

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = |\alpha|^2 \frac{\hbar\omega}{2} + |\beta|^2 \hbar\omega$$

Quindi

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 \frac{\hbar\omega}{2} + |\beta|^2 \hbar\omega = \frac{9}{10}\hbar\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 + 2|\beta|^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$|\beta|^2 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} \qquad |\alpha|^2 = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \beta = e^{i\alpha}\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{[fissata la fase dello stato]}$$

$$\psi = \phi_a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}|1\,1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\alpha}|1\,0\rangle_y\right)$$

(c)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\omega t/2}\phi_a|1\,1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\alpha}e^{-i\omega t}\phi_a|1\,0\rangle_y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_a|1\,1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\alpha - i\omega t/2}\phi_a|1\,0\rangle_y \qquad \left(\begin{matrix}\text{eliminata} \\ \text{fase } e^{-i\omega t/2}\end{matrix}\right)$$

$$= \phi_a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}|1\,1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\beta}|1\,0\rangle_y\right) \qquad \beta = \alpha - \frac{\omega t}{2}$$

Ora $\quad \psi(t) = \phi_a \phi_{spin}$ per cui

$$\langle\psi(t)|x_1 x_2 S_z|\psi(t)\rangle = \langle\phi_a|x_1 x_2|\phi_a\rangle\langle\phi_{sp}|S_z|\phi_{sp}\rangle$$

Calcoliamo il valore medio spaziale

$$\langle\phi_a|x_1 x_2|\phi_a\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}_1\langle 1|\,{}_2\langle 0| - {}_1\langle 0|\,{}_2\langle 1|\right]|x_1 x_2|\left[|1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ {}_1\langle 1|x_1|1\rangle_1\,{}_2\langle 0|x_2|0\rangle_2 \qquad \rightsquigarrow = 0 \text{ dato che}$$

$$\langle n|x|n\rangle = 0$$

$$+\,{}_1\langle 0|x_1|0\rangle_1\,{}_2\langle 1|x_2|1\rangle_2 \qquad \rightsquigarrow = 0 \text{ per oscillatore armonico}$$

$$-\,{}_1\langle 1|x_1|0\rangle_1\,{}_2\langle 0|x_2|1\rangle_2 - {}_1\langle 0|x_1|1\rangle_1\,{}_2\langle 1|x_2|0\rangle_2\Big\}$$

Tenuto conto che $\langle 0|x|1\rangle = \langle 1|x|0\rangle^*$ e che i due oscillatori sono identici

$$\langle \phi_a | x_1 x_2 | \phi_a \rangle = - \, |\langle 1|x|0\rangle|^2$$

Ora

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q) \\ \eta^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q) \end{cases}$$

$$x = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\eta^+ - \eta)$$

$$\langle 1|x|0\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad (|1\rangle = \eta^+|0\rangle)$$

$$|\langle 1|x|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

[Se fosse stato definito $|1\rangle = a^+|0\rangle$ il valor medio $\langle 1|x|0\rangle$ sarebbe stato reale ma con lo stesso modulo]

Quindi

$$\langle \phi_a | x_1 x_2 | \phi_a \rangle = -\frac{\hbar}{2m\omega}$$

Calcoliamo la parte di spin

$$\phi_{spin} = \frac{1}{\sqrt5}|1\,1\rangle_y + \frac{2}{\sqrt5}e^{i\beta}|1\,0\rangle_y$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac12|1\,1\rangle_z + \frac{i}{\sqrt2}|1\,0\rangle_z - \frac12|1\,-1\rangle_z\right)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt5}e^{i\beta}\left(\frac{1}{\sqrt2}|1\,1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt2}|1\,-1\rangle_z\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt5} + \sqrt{\frac25}e^{i\beta}\right)|1\,1\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{10}}|1\,0\rangle_z$$

$$+ \left(-\frac{1}{2\sqrt5} + \sqrt{\frac25}e^{i\beta}\right)|1\,-1\rangle_z$$

$$\langle \phi_{spin} | S_z | \phi_{spin} \rangle =$$

$$= \hbar \left| \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}} e^{i\beta} \right|^2 - \hbar \left| -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}} e^{i\beta} \right|^2$$

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}} e^{i\beta} \right|^2 = \frac{1}{20} \left| 1 + 2\sqrt{2} e^{i\beta} \right|^2$$

$$= \frac{1}{20} \left(1 + 8 + 4\sqrt{2} \cos\beta \right) = \frac{1}{20} \left(9 + 4\sqrt{2} \cos\beta \right)$$

$$\left| -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}} e^{i\beta} \right|^2 = \frac{1}{20} \left(9 - 4\sqrt{2} \cos\beta \right)$$

$$\langle \phi_{spin} | S_z | \phi_{spin} \rangle = \frac{\hbar}{20} \left(9 + 4\sqrt{2} \cos\beta - 9 + 4\sqrt{2} \cos\beta \right)$$

$$= \frac{\hbar}{20} \cdot 8\sqrt{2} \cos\beta = \frac{\hbar}{5} 2\sqrt{2} \cos\beta$$

Quindi

$$\langle \psi\, t | x_1 x_2 | \psi\, t \rangle = - \frac{\hbar}{\cancel{2} m\omega} \cdot \frac{\hbar}{5} \cancel{2}\sqrt{2} \cos\beta$$

$$= - \frac{\hbar^2}{m\omega} \frac{\sqrt{2}}{5} \cos\left(\alpha - \frac{\omega t}{2}\right) = M$$

Per $t = 2\pi/\omega$

$$M = - \frac{\hbar^2}{m\omega} \frac{\sqrt{2}}{5} \cos(\alpha - \pi)$$

Minimo per $\cos(\alpha - \pi) = 1 \qquad \alpha = \pi$

d)

$$|\psi\, t\rangle = \phi_a \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}\, e^{i\beta} \right) |1\,1\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{10}} |1\,0\rangle_z + \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}\, e^{i\beta} \right) |1\,-1\rangle_z \right]$$

Ora

$$|1\,1\rangle_z = \Big|\overset{S_1}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_{1z}}{\tfrac{1}{2}}\Big\rangle_1 \Big|\overset{S_2}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_{2z}}{\tfrac{1}{2}}\Big\rangle_2$$ ← stati di spin di singola particella

$$|1\,0\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_2 \right)$$

$$|1\,-1\rangle_z = \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2$$

Quindi

$$\text{prob (spin allineati)} = \text{prob}\,(S_z = +1) + \text{prob}\,(S_z = -1)$$

$$= \left| \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}\, e^{i\beta} \right|^2 + \left| -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}\, e^{i\beta} \right|^2$$

$$= \frac{1}{20} (9 + 4\sqrt{2}\cos\beta) + \frac{1}{20} (9 - 4\sqrt{2}\cos\beta) = \frac{9}{10}$$

$$\text{prob (spin non allineati)} = \text{prob}\,(S_z = 0) = \left| \frac{i}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10}$$

Esercizio 2

1.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi_a(x)|^2=\int_{-L/4}^{L/4} dx\,|N|^2=|N|^2\frac{L}{2}\qquad |N|=\sqrt{\frac{2}{L}}\qquad N=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

(scelta fase)

$$\langle\hat{x}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x\,|\psi_a(x)|^2=0 \qquad \text{per parità}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,x^2|\psi_a(x)|^2=|N|^2\int_{-L/4}^{L/4} dx\,x^2=\frac{2}{L}\,\frac{2}{3}\left(\frac{L}{4}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3L}\cdot\frac{L^3}{16\cdot 4}=\frac{L^2}{48}$$

2.

$$\text{Prob (misurare } p)=|\langle p|\alpha\rangle|^2$$

$$\langle p|\alpha\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi_\alpha(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-L/4}^{L/4} dx\,e^{-ipx/\hbar}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\left(-\frac{\hbar}{ip}\right)\left(e^{-ipL/4\hbar}-e^{ipL/4\hbar}\right)$$

$$=\frac{2\hbar}{\sqrt{\pi\hbar L}}\,\frac{\sin\left(\frac{pL}{4\hbar}\right)}{p}$$

$$\text{Prob}(p)=\frac{4\hbar}{\pi L}\left(\frac{\sin\frac{pL}{4\hbar}}{p}\right)^2$$

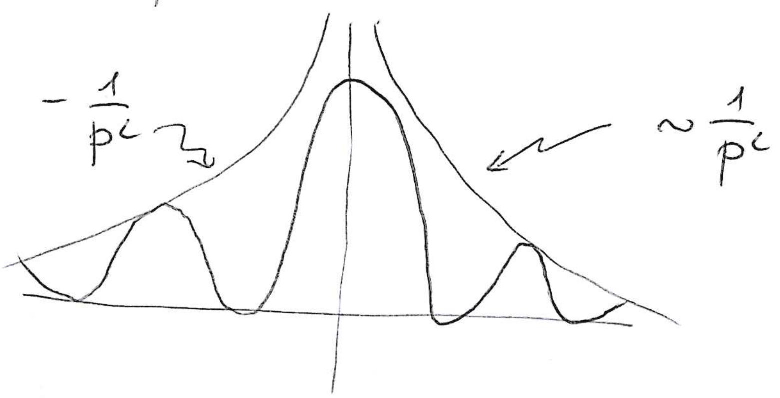
Si noti che deve valere $\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\text{Prob}(p)=1$

Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \, \frac{4\hbar}{\pi L} \, \frac{\sin^2 \frac{pL}{4\hbar}}{p^2} = \qquad x = \frac{pL}{4\hbar}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\text{integrale fattibile con i metodi dell'analisi complessa} \right) = 1$$

Grafico



Nota:
$P(p)$ ha limite finito per $p \to 0$

$$P(0) = \frac{4\hbar}{\pi L} \cdot \left(\frac{L}{4\hbar}\right)^2 = \frac{L}{4\hbar\pi}$$

3.

Dobbiamo esprimere lo stato in termini delle autofunzioni di H.

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n: 1, \dots \infty \qquad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$$

n disp. $\quad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos k_n x$

in $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ (le autofunz. sono nulla per $x \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$)

n pari $\quad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x$

Sviluppiamo $\psi_\alpha(x) = \sum a_n \psi_n(x)$

$$a_n = \langle n | \alpha \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \psi_n^*(x) \psi_\alpha(x) \, dx$$

$a_n = 0$ per n pari dato che $\psi_n(-x) = -\psi_n(x)$ $\quad \psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(-x)$.

Per n dispari

$$a_n = N\sqrt{\frac{2}{L}} \int_{-L/4}^{L/4} dx \cos k_n x = \frac{2}{L}\,\frac{1}{k_n} \sin k_n x \Big|_{-L/4}^{L/4} =$$

$$= \frac{4}{L k_n} \sin \frac{k_n L}{4} = \frac{4}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot\frac{L}{4}\right) = \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (n=1)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ (n=3),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ (n=5)\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ (n=7) \ldots$$

Quindi $|a_n| = \frac{4}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| = \frac{4}{n\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}$

Quindi

$$\psi_\alpha = \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{disp.}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \psi_n(x)$$

$$\psi_\alpha(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{disp}}} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{-iE_n t/\hbar}\, \psi_n(x)$$

$$P(\text{misura } E_n) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ |a_n|^2 = \frac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ disp.} \end{cases}$$

Vale (ovviamente)

$$\sum_{n\,\text{disp}} \frac{8}{n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1$$

4.

Al primo ordine in teoria perturbativa

$$E_n' = E_n + \langle n | V(x) | n \rangle \qquad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \ \left(\begin{matrix}\text{energia} \\ \text{imperturbata}\end{matrix}\right)$$

Per n dispari

$$\langle n|V(x)|n\rangle = \int_{-L/4}^{L/4} dx\, V_0 |\psi_n(x)|^2$$

$$= \frac{2}{L} V_0 \int_{-L/4}^{L/4} dx \cos^2 k_n x = \frac{V_0}{L} \int_{-L/4}^{L/4} dx\,(1+\cos 2k_n x)$$

$$= \frac{V_0}{L}\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{\cancel{2}k_n} \cancel{2} \sin 2k_n \cdot \frac{L}{4}\right)$$

$$= \frac{V_0}{L}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot\frac{L}{2}\right)\right) = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = 1\ (n=1),\ -1\ (n=3),\ 1\ (n=5) \ldots = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Quindi per n dispari

$$E'_n = E_n + V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi}\right)$$

Per n pari

$$\langle n|V(x)|n\rangle = \frac{2}{L} V_0 \int_{-L/4}^{L/4} dx \sin^2 k_n x = \frac{V_0}{L}\int_{-L/4}^{L/4} dx\,(1-\cos 2k_n x)$$

$$= \frac{V_0}{L}\left(\frac{L}{2} - \frac{1}{k_n}\sin\frac{k_n L}{2}\right) = V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ per ogni n pari. Quindi

$$E'_n = E_n + \frac{V_0}{2}$$

Funzione d'onda dello stato fondamentale

$$\psi'_{SF}(x) = \psi_{n=1}(x) + \psi^{(1)}(x) \qquad \psi^{(1)}(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{\langle n|V|1\rangle}{E_1 - E_n} \psi_n(x)$$

$$E_1 - E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 - k_n^2) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}(1-n^2) = E_1(1-n^2)$$

$$\langle n|V|1\rangle = V_0 \int_{-L/4}^{L/4} dx\, \psi_n^*(x)\psi_1(x)$$

Per n pari l'integrale è nullo per parità

Per n dispari

$$\frac{2}{L}\int_{-L/4}^{L/4} dx \cos k_n x \cos k_1 x = \frac{1}{L}\int_{-L/4}^{L/4} dx \left(\cos(k_n+k_1)x + \cos(k_n-k_1)x\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{2}{k_n+k_1}\sin\left(\frac{(k_n+k_1)L}{4}\right) + \frac{2}{k_n-k_1}\sin\left(\frac{k_n-k_1}{4}L\right)\right.$$

$$\sin\left(\frac{k_n+k_1}{4}L\right) = \sin\left(\frac{\pi}{L}\frac{(n+1)}{4}L\right) = \sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right)$$

$$= 1 \ (n=1), \quad 0 \ (n=3), \quad -1 \ (n=5), \quad 0 \ (n=7) \ldots$$

$$\sin\left(\frac{k_n-k_1}{4}L\right) = \sin\left(\frac{n-1}{4}\pi\right) =$$

$$= 0 \ (n=1), \quad 1 \ (n=3), \quad 0 \ (n=5), \quad -1 \ (n=7) \ldots$$

Quindi

$$\langle n|V|1\rangle = V_0\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin\left(\frac{n-1}{4}\pi\right)\right]$$

Esame di Meccanica Quantistica, 30/06/2021 (remoto)

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1 che è vincolata a muoversi su una sfera di raggio R ed è soggetta alla Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(L^2 + 2J^2 - 2\hbar J_x)$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare, $\boldsymbol{S}$ l'operatore di spin e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$.

a) Si calcoli l'energia e la degenerazione dei due livelli di energia più bassa. Per ciascuno dei due livelli si specifichi una base, esprimendola in termini delle autofunzioni $|ls; jj_z\rangle$ di L^2, S^2, J^2 e J_z.

b) Al tempo $t = 0$, il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che: (i) una misura di energia fornisce con certezza un valore inferiore a $5\hbar\omega$; (ii) una misura di J^2 fornisce con certezza valori strettamente positivi; (iii) il valor medio dell'energia è $\frac{18}{5}\hbar\omega$; (iv) il valor medio di J_x è $\hbar$. Si scrivano tutti gli stati compatibili con queste quattro condizioni.

c) Si calcoli l'evoluto temporale degli stati calcolati al punto b). Al tempo $t = \pi/4\omega$ viene fatta una misura di J_z ottenendo $\hbar$. Si calcolino gli stati $|\psi_1\rangle$ ottenuti dopo la misura.

d) Si calcoli il valor medio di S_z sugli stati $|\psi_1\rangle$.

Esercizio 2. All'istante $t = 0$ la funzione d'onda nello spazio degli impulsi di una particella libera di massa m e spin 0 in una dimensione è data da

$$\langle p|\alpha\rangle = \phi_\alpha(p) = \begin{cases} K & (p_0 - \Delta p) \le p \le (p_0 + \Delta p) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

dove p_0 e Δp sono due parametri reali positivi e K è una costante di normalizzazione indipendente da p.

1. Si determini la costante di normalizzazione K e la funzione d'onda nello spazio delle coordinate.

2. Si rappresentino graficamente le densità di probabilità relative a misure di posizione e di impulso.

3. Si calcolino i valori medi degli operatori $\hat{p}$, $\hat{p}^2$, della dispersione $(\Delta\hat{p})^2$ e dell'operatore posizione $\hat{x}$.

4. Si determini la funzione d'onda nello spazio degli impulsi all'istante $t > 0$.

5. Si calcoli il valore medio di $\hat{p}$, di $\hat{x}$ e della parità $\hat{\mathcal{P}}$ all'istante $t > 0$.

6. Assumendo $p_0 > \Delta p$, si calcoli la probabilità di misurare un'energia E maggiore di $\frac{(2p_0+\Delta p)^2}{8m}$.

Esercizio 1

a)

Le autofunzioni della parte spaziale sono le armoniche sferiche $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = |\ell m\rangle_L$ che vanno moltiplicate per la funzione d'onda di spin dato che

$$\underset{L^2}{\ell} \oplus \underset{S^2}{1} = \underset{J^2}{\begin{cases} \ell+1 \\ \ell \\ \ell-1 \end{cases}} \quad \text{se } \ell \neq 0 \qquad \underset{L^2}{\ell=0} \oplus \underset{S^2}{1} = \underset{J^2}{1}$$

Gli stati sono

L	J	
0	1	$E = \hbar\omega(4-2J_z) = \begin{cases} 2\hbar\omega & J_z=1 \\ 4\hbar\omega & J_z=0 \\ 6\hbar\omega & J_z=-1 \end{cases}$
1	0	$E = \hbar\omega(2) = 2\hbar\omega$
1	1	$E = \hbar\omega(2+4-2J_z) = \begin{cases} 4\hbar\omega & J_z=1 \\ 6\hbar\omega & J_z=0 \\ 8\hbar\omega & J_z=-1 \end{cases}$
2	1	$E = \hbar\omega(6+4-2J_z) = \begin{cases} 8\hbar\omega & J_z=1 \\ 10\hbar\omega & J_z=0 \\ 12\hbar\omega & J_z=-1 \end{cases}$
2	2	$E = \hbar\omega(6+6-2J_z) = \begin{cases} 14\hbar\omega & J_z=2 \\ \vdots \end{cases}$

Stati più bassi

$$E = 2\hbar\omega \begin{cases} |1\,0\,1\,1\rangle_x \\ |1\,1\,0\,0\rangle_x \end{cases} \qquad E = 4\hbar\omega \begin{cases} |1\,0\,1\,0\rangle_x \\ |1\,1\,1\,1\rangle_x \end{cases}$$

(labels above kets: $L\ J\ J_x$)

Dobbiamo ora esprimere gli stati $|l\, j\, j_x\rangle_x$ in termini degli stati $|l\, j\, j_z\rangle_z$

Per lo stato con $j=0$ vale ovviamente

$$|1\,0\,0\rangle_x = |1\,0\,0\rangle_y$$

Diagonalizziamo gli stati con $J=1$. In tal caso

$$J_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$ nella base di autofunzioni di J_z

i) Calcolo di $\underset{j\ j_x}{|1\,1\rangle_x}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = c \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}, b, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|v|^2 = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2$$

$$|b|^2 = \frac{1}{2}$$

$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ con opportuna scelta di fase

$$v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overset{L\ J\ J_x}{|0\,1\,1\rangle_x} = \frac{1}{2}|0\,1\,1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,1\,0\rangle_z + \frac{1}{2}|0\,1\,{-1}\rangle_z$$

$$|1\,1\,1\rangle_x = \frac{1}{2}|1\,1\,1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1\,0\rangle_z + \frac{1}{2}|1\,1\,{-1}\rangle_z$$

2) Calcolo di $|1\ 0\rangle_x$ $\quad$ ③
$\quad\quad\quad\quad\quad\; j\ j_x$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b = 0 \\ c = -a \end{matrix}$$

$v = (a, 0, -a) \qquad |v|^2 = 2|a|^2 \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ con scelta di fase

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\underset{\ell\ j\ j_x}{|0\ 1\ 0\rangle_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\ 1\ 1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\ 1\ -1\rangle_z$$

b)

i) + ii) combinazione lineare dei tre stati con $J=1$ che corrispondono ai due livelli più bassi:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\ 1\ 1\rangle_x + \beta|0\ 1\ 0\rangle_x + \gamma|1\ 1\ 1\rangle_x$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ per normalizzazione

iii) $|\alpha|^2\, 2\hbar\omega + 4\hbar\omega(|\beta|^2 + |\gamma|^2) = \frac{18}{5}\hbar\omega$

iv) $\hbar|\alpha|^2 + \hbar|\gamma|^2 = \hbar$

Quindi

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 2|\gamma|^2 = \frac{9}{5} \\ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |\beta|^2 = 0 \\ |\alpha|^2 + 2|\gamma|^2 = \frac{9}{5} \\ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \end{cases}$$

$$|\beta|^2 = 0 \qquad |\gamma|^2 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} \qquad |\alpha|^2 = \frac{1}{5}$$

Quindi, con opportuna scelta di fase

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\alpha}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |\overset{\ell\ j\ j_x}{0\ 1\ 1}\rangle_x + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\alpha} |\overset{\ell\ j\ j_x}{1\ 1\ 1}\rangle_x$$

c)

$$|\psi\ t\rangle = \underbrace{\cancel{e^{-2i\omega t}}}_{\text{eliminabile}} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} |0\,1\,1\rangle_x + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\alpha - 2i\omega t} |1\,1\,1\rangle_x \right]$$

Al tempo $t_c = \frac{\pi}{4\omega}$, $e^{-2i\omega t} = e^{-i\pi/2} = -i$

$$|\psi\ t_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |0\,1\,1\rangle_x - \frac{2}{\sqrt{5}} i e^{i\alpha} |1\,1\,1\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} |0\,1\,1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\,1\,0\rangle_z + \frac{1}{2} |0\,1\,-1\rangle_z \right]$$

$$- \frac{2}{\sqrt{5}} i e^{i\alpha} \left[\frac{1}{2} |1\,1\,1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\,1\,0\rangle_z + \frac{1}{2} |1\,1\,-1\rangle_z \right]$$

$$\Big\downarrow \text{MISURA}$$

$$|\psi_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2} |0\,1\,1\rangle_z - \frac{2}{\sqrt{5}} i e^{i\alpha} \frac{1}{2} |1\,1\,1\rangle_z$$

Lo stato va normalizzato:

$$|\psi_1\rangle = A |\psi_1'\rangle \qquad \langle\psi_1|\psi_1\rangle = |A|^2 \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{|A|^2}{4} = 1$$

$A = 2$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |0\,1\,1\rangle_z - \frac{2}{\sqrt{5}} i e^{i\alpha} |1\,1\,1\rangle_z$$

d) Dobbiamo cambiare base $|L\; J\; J_z\rangle = |\ell\; \ell_z\rangle_L\, |S_z\rangle_S$

$$\begin{matrix} \ell & J & J_z \end{matrix}$$
$$|0\;1\;1\rangle_z = |0\;0\rangle_L\, |1\rangle_S \qquad (\text{Clebsch-G. } 1 \otimes 0)$$

$$|1\;1\;1\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\;1\rangle_L |0\rangle_S - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\;0\rangle_L |1\rangle_S \qquad (\text{C.G } 1 \times 1)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |0\;0\rangle_L |1\rangle_S - \frac{2}{\sqrt{5}} i e^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\;1\rangle_L |0\rangle_S - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}} |1\;0\rangle_L |1\rangle_S \right)$$

$$\langle \psi_1 | S_z | \psi_1 \rangle = \frac{1}{5}\hbar + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}\hbar = \frac{\hbar}{5} + \frac{2\hbar}{5} = \frac{3\hbar}{5}$$

Esercizio 2

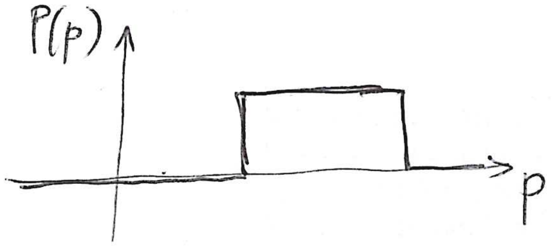
1.

$$\int dp\, |\phi_\alpha(p)|^2 = |k|^2 \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} dp = 2\Delta p\, |k|^2 \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{2\Delta p}} \quad \left(\begin{matrix}\text{con opp.} \\ \text{scelta di} \\ \text{fase}\end{matrix}\right)$$

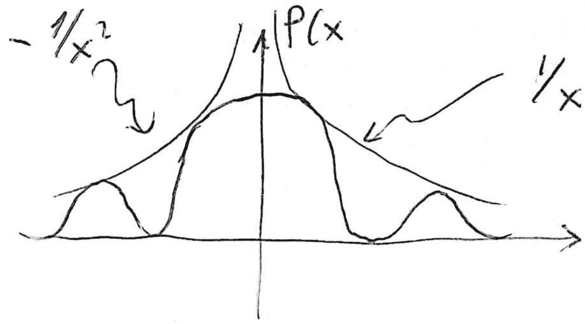
$$\psi_\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle = \int dp\, \langle x | p \rangle \langle p | \alpha \rangle$$
$$= \int dp\, \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \phi_\alpha(p) = \frac{k}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} dp\, e^{ipx/\hbar}$$
$$= \frac{k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \frac{\hbar}{ix}\, e^{ip_0x/\hbar} \left(e^{i\Delta p x/\hbar} - e^{-i\Delta p x/\hbar} \right)$$
$$= \frac{k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \frac{2\hbar}{x}\, e^{ip_0x/\hbar} \sin\left(\frac{\Delta p\, x}{\hbar}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{\pi \Delta p}}\, \frac{1}{x}\, e^{ip_0x/\hbar} \sin\left(\frac{\Delta p\, x}{\hbar}\right)$$

2.

$$P(\text{misura } p) = |\phi_\alpha(p)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta p} & p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$P(\text{misura } x) = |\psi_\alpha(x)|^2 = \frac{\hbar}{\pi \Delta p} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta p\, x}{\hbar}\right)}{x^2}$$



Nota:

Prob (misura $x = 0$)

$$= \frac{\hbar}{\pi \Delta p} \cdot \frac{\Delta p^2}{\hbar^2} = \frac{\Delta p}{\pi \hbar}$$

Si noti che vale la proprietà

$$\int dx\, P(x) = 1 \quad \text{(ovvio)}$$

3.

$$\langle p \rangle = \int dp\, p |\phi_\alpha(p)|^2 = k^2 \int_{p_0 - \Delta p}^{p_0 + \Delta p} dp\, p =$$

$$= \frac{1}{2\Delta p} \frac{1}{2} \left[(p_0 + \Delta p)^2 - (p_0 - \Delta p)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4\Delta p} \left(p_0^2 + \Delta p^2 + 2\Delta p\, p_0 - p_0^2 - \Delta p^2 + 2\Delta p\, p_0 \right) = p_0$$

$$\langle p^2 \rangle = \int dp\, p^2 |\phi_\alpha(p)|^2 = k^2 \int_{p_0 - \Delta p}^{p_0 + \Delta p} dp\, p^2$$

$$= \frac{1}{2\Delta p} \frac{1}{3} \left[(p_0 + \Delta p)^3 - (p_0 - \Delta p)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{6\Delta p} \left[\begin{matrix} p_0^3 + 3p_0^2 \Delta p + 3 p_0 \Delta p^2 + \Delta p^3 \\ - p_0^3 + 3 p_0^2 \Delta p - 3 p_0 \Delta p^2 + \Delta p^3 \end{matrix} \right] = \frac{1}{6\Delta p} \Delta p \left(6 p_0^2 + 2\Delta p^2 \right)$$

$$\langle p^2 \rangle = p_0^2 + \frac{1}{3}\Delta p^2$$

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \frac{1}{3}\Delta p^2$$

$$\langle \hat{x} \rangle = \int dx\, x\, |\psi_\alpha(x)|^2 = 0 \quad \text{per parità}$$

4.

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} k e^{-\frac{it}{\hbar}\frac{p^2}{2m}} & p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5.

$$\langle \alpha t | p | \alpha t \rangle = \int dp\, p\, |\phi_\alpha(t)|^2 = \int dp\, p\, |\phi_\alpha(t=0)|^2 = p_0$$

(È ovvio che il valor medio non dipenda da t dato che $[H, p] = 0$)

Nello spazio degli impulsi $\hat{q} \to + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$

$$\hat{q}\,\phi_\alpha(t) = \begin{cases} k e^{-it/\hbar \frac{p^2}{2m}} (i\hbar)\left(-\frac{it}{\hbar}\frac{p}{m}\right) & p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \frac{tp}{m}\phi_\alpha(t)$$

$$\langle \phi_\alpha(t) | \hat{q} | \phi_\alpha(t) \rangle = \frac{t}{m} \langle \phi_\alpha(t) | p | \phi_\alpha(t) \rangle = \frac{p_0 t}{m}$$

Alternativamente avremmo potuto utilizzare le ~~leggi~~ eq. di Hamilton

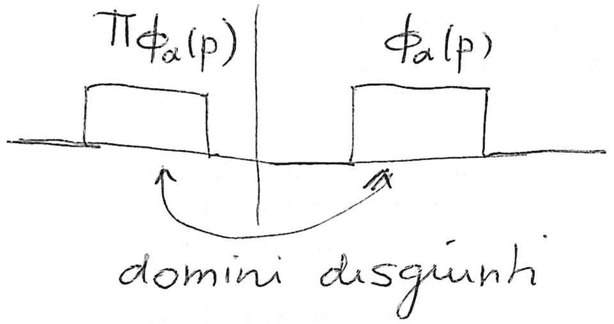
$$\frac{d}{dt}\langle \phi_\alpha(t) | q | \phi_\alpha(t) \rangle = \langle \phi_\alpha(t) | \frac{p}{m} | \phi_\alpha(t) \rangle = \frac{p_0}{m}$$

$$\langle \phi_\alpha(t) | q | \phi_\alpha(t) \rangle = \frac{p_0 t}{m} \quad \text{dato che } \langle \hat{q} \rangle = 0 \text{ a } t = 0$$

Valor medio della parità

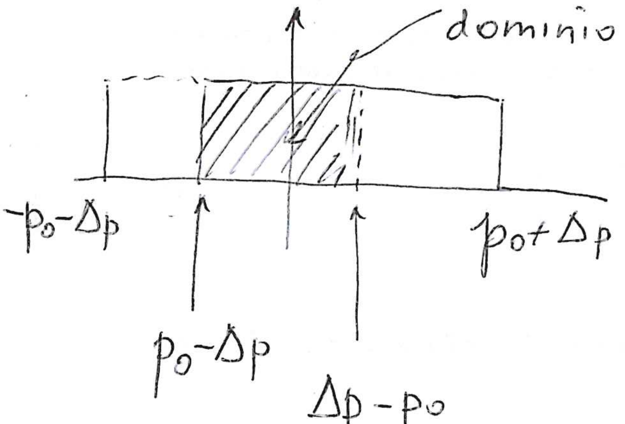
$$\Pi\,\phi_\alpha(p) = \begin{cases} k\, e^{-it/\hbar \frac{p^2}{2m}} & -p_0-\Delta p < p < -p_0+\Delta p \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Se $p_0 > \Delta p$



$$\int dp\, \phi_\alpha^*(p)\, \Pi\phi_\alpha(p) = 0$$

Se $p_0 < \Delta p$ allora $p_0 - \Delta p$ è negativo, $-p_0+\Delta p$ è positivo



$$\langle \phi_\alpha | \Pi\phi_\alpha \rangle = \int dp\, \phi_\alpha^*\, \Pi\phi_\alpha =$$

$$= \int_{p_0-\Delta p}^{\Delta p - p_0} dp\, k^2 = \frac{1}{2\Delta p}(\Delta p - p_0 - p_0 + \Delta p)$$

$$= \frac{1}{2\Delta p}(2\Delta p - 2p_0)$$

$$= 1 - \frac{p_0}{\Delta p}$$

6.

Per $p_0 > \Delta p$ i valori di p possibili sono positivi. Quindi se

$$E > \frac{1}{8m}(2p_0+\Delta p)^2 = \frac{1}{2m}\left(p_0+\frac{\Delta p}{2}\right)^2$$

vale $p > p_0 + \frac{\Delta p}{2}$

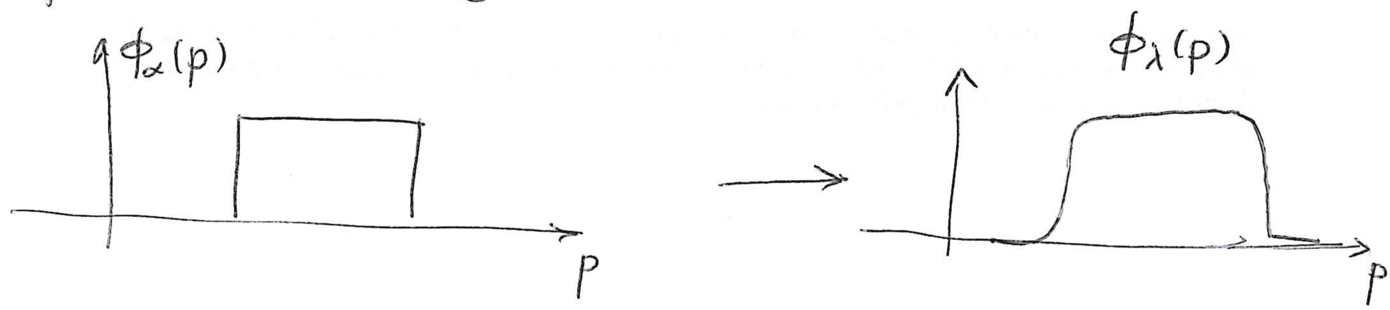
La probabilità è quindi

$$\int_{p_0+\Delta p/2}^{+\infty} dp\, |\phi_\alpha(p)|^2 = k^2 \int_{p_0+\Delta p/2}^{p_0+\Delta p} dp = \frac{1}{2\Delta p}\cdot\frac{\Delta p}{2} = \frac{1}{4}$$

NOTA MATEMATICA

Da un punto di vista matematico, il calcolo del valor medio di $\hat{x}$ richiede qualche precisazione. Nella rappresentazione degli impulsi $\hat{x} = i\hbar\, \partial/\partial p$ e quindi $\hat{x}$ è ben definito sulle funzioni derivabili. La funzione $\phi_\alpha(p)$ NON GODE di questa proprietà. Vi sono quindi delle ambiguità che vogliamo discutere.

Supponiamo di regolarizzare la $\phi_\alpha(p)$



$\phi_\lambda(p)$ è C^∞ con $\phi_\lambda(p) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \phi_\alpha(p)$ puntualmente

$$\phi_\lambda(p,t) = e^{-ip^2/2m\, t/\hbar}\, \phi_\lambda(p) \quad \text{[EVOLUZIONE TEMPORALE]}$$

$$\hat{q}\,\phi_\lambda(p,t) = \frac{tp}{m}\,\phi_\lambda(p,t) + e^{-ip^2/2m\, t/\hbar}\left(i\hbar\,\phi_\lambda'(p)\right)$$

Quindi

$$\int dp\; \phi_\lambda^*(p,t)\,\hat{q}\,\phi_\lambda(p,t)$$

$$= \frac{t}{m}\int dp\; p\;\phi_\lambda^*(p,t)\,\phi_\lambda(p,t)$$

$$+ \int dp\; \phi_\lambda(p)\left(i\hbar\,\phi_\lambda'(p)\right)$$

$$= \frac{t}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\; p\;\phi_\lambda(p)^2 + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dp\;\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\phi_\lambda^2(p)$$

uguale a 0 se $\phi_\lambda(\pm\infty) = 0$

$$= \frac{t}{m}\langle\phi_\lambda|\,p\,|\phi_\lambda\rangle$$

$$= \frac{p_0 t}{m}$$

Abbiamo riottenuto lo stesso risultato

Esame di Meccanica Quantistica, 14/07/2021 P

Esercizio 1. Sia data una particella di massa m vincolata a muoversi in un piano e soggetta al potenziale

$$U_0(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) & \text{per } x \geq 0 \text{ e per ogni valore di } y, \\ +\infty & \text{per } x < 0 \text{ e per ogni valore di } y. \end{cases}$$

a) Si calcoli lo spettro del sistema. In particolare, si verifichi che lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato sono nondegeneri. Si determinino la funzione d'onda $\langle x|0\rangle = \psi_0(x,y)$ dello stato fondamentale e la funzione d'onda $\langle x|1\rangle = \psi_1(x,y)$ del primo livello eccitato.

b) Siano P la parità, $Pf(x,y) = f(-x,-y)$, e I_y l'operatore di inversione dell'asse y, $I_y f(x,y) = f(x,-y)$. Quali di questi operatori commutano con l'Hamiltoniana? Si determini se le autofunzioni di H sono anche autofunzioni di P. In caso positivo si calcolino i corrispondenti autovalori. Si risponda alla stessa domanda per I_y.

c) Si calcolino $\langle 0|x|0\rangle$ e $\langle 0|y|0\rangle$.

d) Se viene fatta una misura di L_z sullo stato fondamentale, quali valori si ottengono e con quale probabilità? Si presti attenzione al fatto che $\psi_0(x,y)$ è autofunzione di un potenziale infinito per $x < 0$. Suggerimento: Si utilizzino coordinate polari.

Integrale utile:

$$I(n) = \int_0^\infty dz\ z^n e^{-z^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Esplicitamente: $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I(1) = \frac{1}{2}$, $I(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $I(3) = \frac{1}{2}$, $I(4) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$.

Espressione di L_z in coordinate polari (r,ϕ):

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Esercizio 2. Una particella di massa m e spin $1/2$ è sottoposta all'azione di un potenziale armonico tridimensionale:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2\,.$$

1. Determinare lo spettro dell'Hamiltoniana e la degenerazione dei livelli energetici. Per i primi due livelli energetici, scrivere una base esplicita di autofunzioni simultanee dell'Hamiltoniana, del momento angolare orbitale e del momento angolare di spin nella forma:

$$\psi_{n\ell m\sigma}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_\ell^m(\theta,\phi)\chi_\sigma$$

2. Si aggiunga ad $\hat{H}_0$ un'interazione di tipo spin-orbita, ovvero:

$$\hat{H}_{LS} = \epsilon\frac{\omega}{\hbar}\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}}$$

con $0 < \epsilon \ll 1$. Determinare i livelli di energia dell'Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{LS}$ del sistema. Mostrare in particolare come l'interazione spin-orbita rimuova parzialmente la degenerazione dei primi due livelli energetici e identificare una base di autoket dell'Hamiltoniana $\hat{H}$ per questi due

livelli.
3. Si determino ora gli stati quantistici compatibili con le seguenti proprietà: (i) una misura di $\hat{H}$ fornisce con certezza un valore $E < 3\hbar\omega$, (ii) una misura di $\hat{L}_z$ fornisce con certezza un valore non nullo, (iii) il valore medio di $\hat{L}_z$ è nullo, (iv) una misura di $\hat{S}_z$ fornisce con certezza il valore $s_z = \hbar/2$.
4. Fra tutti gli stati identificati al punto precedente, determinare lo stato $|\phi\rangle$ tale che la probabilità di trovare la particella nel primo ottante $(x > 0, y > 0, z > 0)$ sia massima.
5. Si determini l'evoluto temporale al tempo t dello ket trovato al punto precedente $|\phi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\phi\rangle$

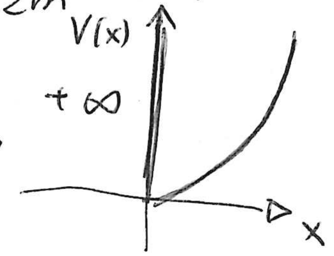
①

Esercizio 1

a) L'Hamiltoniana può essere scritta come

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(q_x) + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

$V(x) \rightarrow$



$V(x) \equiv$ oscillatore armonico con parete

Le autofunzioni di $V(x)$ sono le autofunzioni DISPARI dell'oscillatore armonico.

Quindi, se $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico STANDARD per $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$ abbiamo i livelli

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $[n=1]$ con autofunzione $\begin{cases} \sqrt{2}\,\psi_1(x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \hat{\psi}_{SF}(x)$

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $[n=3]$ con autofunzione

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,\psi_3(x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \hat{\psi}_{I\,ecc}(x)$$

ecc.

Notare il fattore $\sqrt{2}$ necessario per la corretta normalizzazione. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\hat{\psi}_{SF}(x)|^2 = \int_0^{\infty} dx\, |\sqrt{2}\,\psi_1(x)|^2 = 2\int_0^{\infty} dx\, |\psi_1(x)|^2$$

Ma $\psi_1(-x) = \psi_1(x)$ e $|\psi_1(-x)|^2 = |\psi_1(x)|^2$. Quindi

$$\int_0^{\infty} dx\, |\psi_1(x)|^2 = \int_{-\infty}^{0} dx\, |\psi_1(x)|^2 .$$

Segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\hat{\psi}_{SF}|^2 = \int_0^{\infty} dx\, |\psi_1(x)|^2 + \int_{-\infty}^{0} dx\, |\psi_1(x)|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi_1(x)|^2 = 1 \qquad [\psi_1 \text{ è normalizzata}]$$

I livelli della Hamiltoniana completa sono quindi

$$E = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar\omega\,(n_x + n_y + 1) \qquad n_x : 1, 3, 5, \dots \quad n_y = 0, 1, 2, 3 \dots$$

STATO FOND

$n_x = 1 \quad n_y = 0 \qquad E = 2\hbar\omega \qquad$ non deg.

I ecc

$n_x = 1 \quad n_y = 1 \qquad E = 3\hbar\omega \qquad$ non deg.

Per scrivere le autofunzioni ricordiamo che per l'oscillatore armonico vale

$$\psi_0 = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-a^2x^2/2} \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2}\,(ax)\, e^{-a^2x^2/2}$$

Quindi

$$\psi_0(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\psi_1(x)\,\psi_0(y) = 2\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/2} (ax)\, e^{-a(x^2+y^2)/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\psi_1(x,y) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/2}(a^2xy)\,e^{-a^2(x^2+y^2)/2} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

b)

Il potenziale è invariante per $y \to -y$, mentre <u>NON</u> è invariante per $x \to -x$ (c'è la parete)

Quindi $[H, I_y] = 0$ ma $[H, P] \neq 0$

Le autofunzioni non sono autofunzioni di P, mentre sono autofunzioni di I_y

$$I_y\left(\hat{\psi}_n(x)\psi_m(y)\right) = (-)^m\hat{\psi}_n(x)\psi_m(y)$$

c)

$$\langle 0|y|0\rangle = \int_0^\infty dx\int_{-\infty}^{+\infty} dy\; y\,|\psi_0(x,y)|^2 = 0$$

[per parità: l'integrando cambia segno se $y \to -y$]

$$\langle 0|x|0\rangle = \int_0^\infty dx\int_0^{\infty} dy\; x\,|\psi_0(x,y)|^2 =$$

$$= \int_0^\infty dx\, x\,|\sqrt{2}\,\psi_1(x)|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,|\psi_0(y)|^2}_{=1 \text{ per normalizzazione}}$$

$$= 2\int_0^\infty dx\, x\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/2} 2\,(ax)^2 e^{-a^2x^2} = \qquad ax = z$$

$$= \frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dz\, z^3 e^{-z^2} = \frac{4}{a\sqrt{\pi}} I(3) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

d)

Le autofunzioni di L_z sono ben definite sul cerchio:

$$f_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

normalizzate in modo che $\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, |f_m(\phi)|^2 = 1$

Quindi scriviamo

$$\psi_0(x,y) = \psi(\phi) R(r)$$

con $\int_0^\infty r|R(r)|^2 dr = 1$

$\int d\phi \, |\psi(\phi)|^2 = 1$

e sviluppiamo

$$\psi(\phi) = \sum_m a_m f_m(\phi)$$

$$\psi_0(x,y) = \sum_m a_m \underbrace{f_m(\phi) R(r)}_{\text{autofunzione di } L_z \text{ NORMALIZZATA}}$$

Quindi $\text{Prob}\,(\text{misurare } L_z = \hbar m) = |a_m|^2$

$$\psi_0(x,y) = 2\frac{a}{\sqrt{\pi}} (ar\cos\phi)\, e^{-a^2r^2/2} = \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} \cos\phi \cdot r e^{-a^2r^2/2} \quad [x>0]$$

Definiamo $R(r) = A r e^{-a^2r^2/2}$ Calcoliamo A in modo che R sia normalizzato

$$\int_0^\infty r\,dr\, |R(r)|^2 = |A|^2 \int dr\, r^3 e^{-a^2r^2} = \frac{|A|^2}{a^4} I(3) = \frac{|A|^2}{2a^4} \qquad A = \sqrt{2}\, a^2$$

Quindi $R = \sqrt{2}\, a^2 r e^{-a^2r^2/2}$

$$\psi_0(x,y) = \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} \cos\phi \, \frac{1}{\sqrt{2}a^2} R(r)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\phi \; R(r) \quad \text{per} \quad x>0 \quad [\text{altrimenti } \psi_0 = 0]$$

Quindi

$$\psi(\phi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\phi & \text{per } -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Controllo. Deve valere

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, |\psi(\phi)|^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, \frac{2}{\pi} \cos^2\phi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, \frac{1+\cos 2\phi}{2} = \frac{1}{\pi} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 \quad \underline{\text{OK}}$$

Se $\psi(\phi) = \sum_m a_m f_m(\phi)$

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, f_m^*(\phi) \psi(\phi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, e^{-im\phi} \cos\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \, e^{-im\phi} \left(e^{i\phi} + e^{-i\phi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{1-m} \sin (1-m)\frac{\pi}{2} + \frac{2}{1+m} \sin (1+m) \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{m-1} + \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{m+1} \right] = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi m}{2}}{m^2-1}$$

$$P(m) = \frac{4}{\pi} \frac{\cos^2 \frac{\pi m}{2}}{(m^2-1)^2}$$

$$P(0) = \frac{4}{\pi^2} \qquad P(\pm 1) = \frac{1}{4} \qquad P(\pm 2) = \frac{4}{9\pi^2} \qquad P(\pm 3) = 0 \ldots$$

~~Sono~~ Si possono ottenere tutti i valori $\hbar m$, con m pari o $m = \pm 1$.

Ovviamente

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P(m) = 1$$

Nel calcolo siamo stati attenti ad utilizzare sempre funzioni normalizzate. Questo però non è strettamente necessario. Si poteva procedere pure in modo più diretto.

$$\psi_0(x,y) = \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} r e^{-a^2r^2/2} \times h(\phi) \qquad h(\phi) = \begin{cases} \cos\phi & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{al di fuori} \end{cases}$$

Utilizzando la trasformata (serie) di Fourier

$$h(\phi) = \sum b_m e^{im\phi}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\phi) e^{-im\phi} = \frac{a_m}{2}$$

Quindi

$$\psi_0(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} r e^{-a^2r^2/2} e^{im\phi}}_{h_m(r,\phi)} b_m$$

Quindi $\psi_0(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(r,\phi)\, b_m$

Le h_m sono autofunzioni di L_z, ma non normalizzate $\langle h_m | h_m \rangle = 4$. Quindi

$$\psi_0(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} h_m(r,\phi)\right)}_{\text{NORMALIZZATA}} (2b_m) \qquad \text{Prob}(L_z = \hbar m) = |2b_m|^2 = |a_m|^2$$

ESERCIZIO 2

1) Lo stato fondamentale ha $l=0$ (non degenere)
Il primo livello eccitato ha $l=1$ (3 stati con $m=0,\pm1$)

Nella base cartesiana $\psi_{SF} = |n_x=0, n_y=0, n_z=0\rangle$

$$\psi_{SF} = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} e^{-a^2(x^2+y^2+z^2)/2}$$
$$= \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} e^{-a^2r^2/2}$$

[NON consideriamo lo spin, irrilevante per determinare le R_{nl}]

Nella base $|n\, l\, l_z\rangle$

$$\psi_{SF} = R_{00}(r)\, Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} R_{00}(r)$$

Confrontando $R_{00} = \sqrt{4\pi}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} e^{-a^2r^2/2}$

Per il I eccitato, al fine di determinare R_{11}, notiamo che

$$|n_x=0, n_y=0, n_z=1\rangle = |\overset{n}{1}\; \overset{l}{1}\; \overset{l_z}{0}\rangle$$

Infatti

$$|n_x=0,n_y=0,n_z=1\rangle \to \sim z f(r) \qquad |1\,1\,0\rangle \to R_{11} Y_1^0 \simeq R_{11}\cos\theta = \frac{R_{11}}{r} z$$

$$\psi_{m=0} = \psi_0(x)\,\psi_0(y)\,\psi_1(z)$$
$$= \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} \sqrt{2}\, a z\, e^{-a^2(x^2+y^2+z^2)/2} = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} \sqrt{2}\, a r \cos\theta\, e^{-a^2 r^2/2}$$

Deve essere uguale a

$$\psi_{m=0} = R_{11}\, Y_1^0 = R_{11} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

Quindi

$$R_{11} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} \sqrt{2}\, a r\, e^{-a^2 r^2/2}$$
$$= \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} a r\, e^{-a^2 r^2/2}$$

DEGENERAZIONE

STATO FOND $\quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad$ deg. 2 (le due possibili orientazioni dello spin)

I LIVELLO $\quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad$ deg. $3 \times 2 = 6$

(3 valori di L_z) (2 valori di S_z)

2)

Si può riscrivere $\quad H_{LS} = \frac{\epsilon\omega}{2\hbar}(J^2 - L^2 - S^2)$

<u>S.F.</u> $\quad L=0 \rightarrow J = 1/2 \qquad E_{LS} = \frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\left(\frac{3}{4} - 0 - \frac{3}{4}\right)\hbar^2 = 0$

L'energia non cambia $\quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

La degenerazione non cambia (2 stati degeneri con $J_z = +1/2$ e $-1/2$)

I livello $\quad L=1 \quad \begin{cases} J=3/2 & E_{LS}=\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\hbar^2\left(\frac{15}{4}-2-\frac{3}{4}\right)=\epsilon\frac{\hbar\omega}{2} \\ J=1/2 & E_{LS}=\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\hbar^2\left(\frac{3}{4}-2-\frac{3}{4}\right)=-\epsilon\hbar\omega \end{cases}$

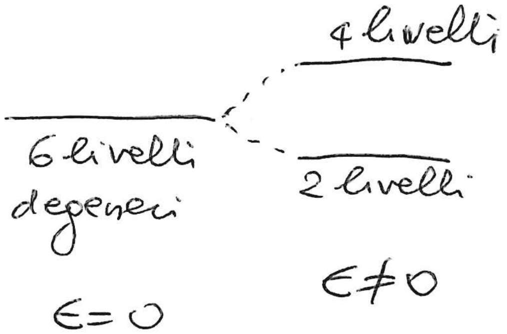
Il livello si separa in due livelli

$J=1/2 \qquad E=\frac{5}{2}\hbar\omega-\epsilon\hbar\omega \qquad (\text{deg. } 2,\ J_z=\pm 1/2)$

$J=3/2 \qquad E=\frac{5}{2}\hbar\omega+\epsilon\frac{\hbar\omega}{2} \qquad (\text{deg. } 4,\ J_z=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2})$

Quindi

$E=\frac{5}{2}\hbar\omega$



La degenerazione è parzialmente rimossa

3. i) È combinazione dei 2+6 stati corrispondenti allo stato fondamentale ed al I eccitato

ii) $L_z\neq 0$ implica anche $L^2\neq 0$. Esclude quindi i due stati con energia $E=\frac{3}{2}\hbar\omega$

iv) solo stati con $S_z=1/2$

Quindi i)+ii)+iv) implica

$$\psi=A\,|\underset{n}{1}\ \underset{l}{1}\ \underset{l_z}{1}\ \underset{S_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle+B\,|\underset{n}{1}\ \underset{l}{1}\ \underset{l_z}{-1}\ \underset{S_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Abbiamo sempre $n=1$, $l=1$ e quindi possiamo semplificare la notazione

$$\psi=A\,|\underset{l_z}{1}\ \underset{S_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle_{LS}+B\,|\underset{l_z}{-1}\ \underset{S_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle_{LS}$$

Ora

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = |A|^2 \hbar + |B|^2 (-\hbar) = 0$$

Quindi $|A| = |B|$

La condizione di normalizzazione è $|A|^2 + |B|^2 = 1$

Quindi

$$|A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Scegliamo $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $B = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}$ α arbitraria

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1 \tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + e^{i\alpha} |{-1} \tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \right)$$

4.

Esplicitiamo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[R_{11} Y_1^1 \chi_{1/2} + e^{i\alpha} R_{11} Y_1^{-1} \chi_{1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} R_{11} \left(Y_1^1 + e^{i\alpha} Y_1^{-1} \right) \chi_{1/2}$$

$$= R_{11} f(\theta, \varphi) \chi_{1/2} \qquad f(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_1^1 + e^{i\alpha} Y_1^{-1} \right)$$

La probabilità richiesta è

$$\int_{\text{ottante}} r^2 dr \, d\Omega \, |\psi|^2 = \underbrace{\int_0^\infty r^2 dr |R_{11}|^2}_{=1 \text{ per normalizzazione}} \int_{\text{ottante}} d\Omega \, |f(\theta,\varphi)|^2$$

$$= \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \, |f(\theta,\varphi)|^2$$

Ottante: $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \cos\theta < 1$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi} \qquad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$\int_0^1 d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta \left(-e^{-i\varphi} + e^{-i\alpha}e^{i\varphi}\right)\left(-e^{i\varphi} + e^{i\alpha}e^{-i\varphi}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{16\pi}\int_0^1 d\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\int_0^{\pi/2} d\varphi\left(2 - e^{-i\alpha}e^{2i\varphi} - e^{i\alpha}e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \frac{3}{16\pi}\int_0^1 dx\,(1-x^2)\left[\pi - \left(e^{-i\alpha}\frac{1}{2i}(e^{i\pi}-1) + e^{i\alpha}\left(-\frac{1}{2i}\right)(e^{-i\pi}-1)\right)\right]$$

$$= \frac{3}{16\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left[\pi - \left(-\frac{e^{-i\alpha}}{i} + \frac{e^{i\alpha}}{i}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\pi - 2\sin\alpha\right]$$

Massimo per $\sin\alpha = -1$ $\quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad e^{i\alpha} = e^{-i\pi/2} = -i$

Lo stato è

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overset{n\,\ell\,\ell_z}{|1\,1\,1\,1\rangle} - i\,\overset{n\,\ell\,\ell_z}{|1\,1\,-1\rangle}\right)\overset{S_z}{\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle}$$

5.

Dobbiamo passare alla base $|n\,\ell\,s\,j\,j_z\rangle = |j\,j_z\rangle_J$

Ci servono i CG per $1 \times 1/2$

$$\left|1\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{LS} = \left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}\right\rangle_J$$

$$\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_{LS} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Quindi

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle_J - \frac{i}{\sqrt{6}} \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

energia

$$E_{3/2} = \frac{5}{2}\hbar\omega + \epsilon\frac{\hbar\omega}{2} \qquad E_{1/2} = \frac{5}{2}\hbar\omega - \epsilon\hbar\omega$$

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle_J - \frac{i}{\sqrt{6}} \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle \right) e^{-iE_{3/2}t/\hbar}$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle e^{-iE_{1/2}t/\hbar}$$

Possiamo semplificare l'espressione

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle_J - \frac{i}{\sqrt{6}} \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle_J e^{i(E_{3/2}-E_{1/2})t/\hbar} \qquad E_{3/2} - E_{1/2} = \frac{3\epsilon}{2}\hbar\omega$$

Esercizio 1

(a) Il problema è equivalente ad una buca infinita.

L' equazione di Schrödinger fornisce

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi(\phi)}{\partial\phi^2} = E\,\psi(\phi) \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \psi(\pm\alpha) = 0 \\ \psi(\phi) = 0 \text{ per } \begin{array}{l} -\pi<\phi<-\alpha \\ \alpha<\phi<\pi \end{array} \end{array}$$

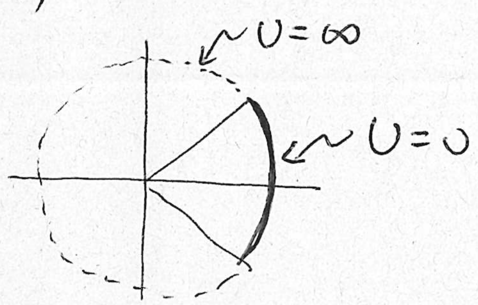
Se definiamo $k = \sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}$

I livelli hanno $k_n = \frac{n\pi}{2\alpha}$ (buca di larghezza $L=2\alpha$)

Autofunzioni $\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\cos k_n\phi & -\alpha<\phi<\alpha \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ n dispari

$\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sin k_n\phi & -\alpha<\phi<\alpha \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ n pari

b)



Il potenziale è simmetrico per $y\to -y$, ma non per $x\to -x$

Quindi

$[I_y, H]=0 \qquad [P, H]\neq 0$

Lo stato fondamentale soddisfa $I_y\psi_1 = +\psi_1$

c)

$$\langle\psi_1|L_z^2|\psi_1\rangle = \left|\,L_z|\psi_1\rangle\right|^2$$

$$L_z|\psi_1\rangle = -i\hbar\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\left(-k_n \sin k_n\phi\right) = \frac{i\hbar k_n}{\sqrt{\alpha}} \sin k_n\phi \quad \text{per } -\alpha<\phi<\alpha$$

Quindi

$$\langle\psi_1|L_z^2|\psi_1\rangle = \frac{\hbar^2 k_n^2}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} d\phi \, \sin^2 k_n\phi$$

$$= \frac{\hbar^2 k_1}{\alpha}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, \sin^2 x$$

$$= \frac{\hbar^2 k_1}{\alpha}\,\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 2x) = \frac{\hbar^2}{2\alpha}\,\frac{\pi}{2\alpha}\,\pi = \frac{\hbar^2\pi^2}{4\alpha^2}$$

(d)

Dobbiamo esprimere $\psi_1(\phi)$ in termini delle autofunzioni $f_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$ (normalizzate) di L_z

$$\psi_1(\phi) = \sum_m a_m f_m(\phi)$$

Quindi

$$\text{prob}\,(L_z = \hbar m) = |a_m|^2$$

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, f_m(\phi)^* \psi_1(\phi) =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} d\phi \, \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\cos\left(\frac{\pi\phi}{2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha}}\int_{-\alpha}^{\alpha} d\phi\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}-m\right)\phi} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+m\right)\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - m\alpha\right)}{\frac{\pi}{2\alpha} - m} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + m\alpha\right)}{\frac{\pi}{2\alpha} + m} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left[- \frac{+\cos m\alpha}{m - \frac{\pi}{2\alpha}} + \frac{\cos m\alpha}{m + \frac{\pi}{2\alpha}} \right]$$

$$= - \frac{\pi}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{\cos m\alpha}{\left(m^2 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}\right)}$$

$$P(L_z = \hbar m) = \frac{\pi}{2\alpha^3} \frac{\cos^2 m\alpha}{\left(m^2 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}\right)^2}$$

Ovviamente

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P(L_z = \hbar m) = 1$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hbar^2 m^2 P(L_z = \hbar m) = \langle \psi_1 | L_z^2 | \psi_1 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4\alpha^2}$$

[Una verifica richiede i metodi dell'analisi complessa]

Esercizio 2

Si tratta di un oscillatore bidimensionale isotropo.

Spettro $E = (n_x + n_y + 1)$

$E_{FOND} = \hbar\omega$ $\quad |n_x = 0 \;\; n_x = 0\rangle$ non deg.

$E_1 = 2\hbar\omega$ $\quad |0\,1\rangle, |1\,0\rangle$ deg = 2

$E_2 = 3\hbar\omega$ $\quad |0\,2\rangle, |1\,1\rangle, |2,0\rangle$ deg = 3

1.

(i) $\longrightarrow$ $|\psi\rangle = A|0\,1\rangle + B|1\,0\rangle$

(ii) $\longrightarrow$ $\langle\psi|x^2 - y^2|\psi\rangle = 0$ implica [ricordiamo che $\langle 1|x^2|0\rangle = 0$ per parità]

$$\left(A^*\langle 0\,1| + B^*\langle 1\,0|\right)(x^2 - y^2)\left(A|01\rangle + B|1\,0\rangle\right)$$

$$= |A|^2\langle 0\,1|x^2 - y^2|0\,1\rangle + |B|^2\langle 1\,0|x^2 - y^2|1\,0\rangle$$

$$= |A|^2\left(\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 1|y^2|1\rangle\right)$$
$$+ |B|^2\left(\langle 1|x^2|1\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle\right)$$

Valori medi nell'oscillatore 1D

$$= \left(|A|^2 - |B|^2\right)\underbrace{\left(\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 1|x^2|1\rangle\right)}$$

Se questa quantità è diversa da zero, concludiamo $|A|^2 - |B|^2 = 0$

Ora

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,a^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle$$

$$x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a|1\rangle + a^\dagger|1\rangle\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(|0\rangle\langle 0|a|1\rangle + |2\rangle\langle 2|a^\dagger|1\rangle\right)$$

$$x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle\right)$$

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \left|x|0\rangle\right|^2 = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 1|x^2|1\rangle = \left|x|1\rangle\right|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot(1+2) = \frac{3\hbar}{2m\omega}$$

Risultati consistenti con il teorema del viriale

$$\langle E|V|E\rangle = \frac{E}{2}$$

$$\langle 0|\frac{1}{2}m\omega^2x^2|0\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\hbar\omega}{2} \Longrightarrow \langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 1|\frac{1}{2}m\omega^2x^2|1\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{3\hbar\omega}{2} \Longrightarrow \langle 1|x^2|1\rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}$$

Quindi $\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 1|x^2|1\rangle \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Abbiamo } |A|^2-|B|^2=0\\ \text{La condizione di normalizzazione}\\ \quad\text{dà } |A|^2+|B|^2=1\end{array}\right\} \Longrightarrow |A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle$

Calcoliamo ora il valor medio di xy, ricordando che $\langle 0|x|0\rangle = \langle 1|x|1\rangle = 0$ [sempre per parità]

$$\langle\psi|xy|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 01| + \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\langle 10|\right)xy\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|10\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\phi}\langle 10|xy|01\rangle + \frac{1}{2}e^{i\phi}\langle 01|xy|10\rangle$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\phi} \langle 1|x|0\rangle\langle 0|y|1\rangle + \frac{1}{2} e^{i\phi} \langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\phi} |\langle 1|x|0\rangle|^2 + \frac{1}{2} e^{i\phi} |\langle 1|x|0\rangle|^2$$

$$= \cos\phi \, |\langle 1|x|0\rangle|^2$$

Ora $\langle 1|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

$$\langle \psi|xy|\psi\rangle = \cos\phi \frac{\hbar}{2m\omega}$$

La condizione (ii) implica $\cos\phi = 1$, $\phi = 0$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

2.

Lo stato fondamentale è non degenere

Quindi

$$\Delta E = \epsilon \cdot \frac{1}{2} m\omega^2 \langle 00|x^2 - y^2|00\rangle$$

$$= \frac{\epsilon}{2} m\omega^2 \left(\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle \right) = 0$$

Il livello non cambia

Il primo livello eccitato è degenere. Base: $|01\rangle, |10\rangle$

Costruiamo la matrice di $\hat{V}$ nel sottospazio

$$\langle 01|V|01\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle 01|x^2 - y^2|01\rangle$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left[\langle 0|x^2|0\rangle - \langle 1|y^2|1\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} (1-3) = -\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\langle 10|V|10\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\langle 1|x^2|1\rangle - \langle 0|y^2|0\rangle \right) = +\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\langle 01|V|10\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle 01|x^2-y^2|10\rangle = 0$$

$$\langle 10|V|01\rangle = \langle 01|V|10\rangle^* = 0$$

Quindi

$$\epsilon V = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega\epsilon}{2} \end{pmatrix}$$

I due livelli si separano

$$2\hbar\omega \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2\hbar\omega + \dfrac{\epsilon\hbar\omega}{2} \\[2ex] 2\hbar\omega - \dfrac{\epsilon\hbar\omega}{2} \end{cases}$$

3.

$$H_0 + \epsilon V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1+\epsilon)x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1-\epsilon)y^2$$

Se $\Omega_1 = \omega(1+\epsilon)^{1/2}$ $\quad \Omega_2 = \omega(1-\epsilon)^{1/2}$

$$H_0 + \epsilon V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_1^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_2^2 y^2$$

$$E = \hbar\Omega_1\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$$ [Due oscillatori di pulsazione Ω_1 e Ω_2]

Per piccoli ϵ $\quad \Omega_1 = \omega\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)$ $\quad \Omega_2 = \omega\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)$

$$E = \hbar\omega\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(n_y - \frac{1}{2}\right) + O(\epsilon^2)$$

$$= \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + \frac{\hbar\omega\epsilon}{2}(n_x - n_y)$$

Per $n_x = n_y = 0$, $(n_x = 1, n_y = 0)$ e $(n_x = 0, n_y = 1)$ si riottengono i risultati precedenti

Esame di Meccanica Quantistica, 13/09/2021 P

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ vincolata a muoversi su una sfera. La sua funzione d'onda è data da

$$|\psi\rangle = A\chi_{-1/2} + B\sin^2\theta\sin 2\phi\,\chi_{1/2},$$

dove χ_s sono le autofunzioni normalizzate di S_z con autovalore s e $\boldsymbol{S}$ è l'operatore di spin. Le costanti A e B sono reali e positive.

a) Si calcolino A e B in modo che $|\psi\rangle$ sia normalizzata e che la probabilità di misurare $J_z = -3\hbar/2$ sia 1/4. $\boldsymbol{J}$ è dato da $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, dove $\boldsymbol{L}$ è l'operatore di momento angolare.

b) Il sistema è soggetto alla Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(J^2 + \hbar J_z).$$

Si calcoli lo spettro, determinando la degenerazione di ogni livello.

c) Sia $|\psi, t\rangle$ l'evoluto al tempo t. In una misura di energia al tempo t quali valori si possono ottenere e con quale probabilità? Si calcoli inoltre $\langle\psi, t|H|\psi, t\rangle$.

d) In una misura di L_z al tempo t quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

Esercizio 2. Due particelle identiche di massa m sono vincolate a muoversi nella regione spaziale tale che $|x| < a$, $|y| < b$ e $|z| < c$, con $a > b > c > 0$.
a) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'energia, precisando il grado di degenerazione per il livello fondamentale ed il primo livello eccitato, sia nel caso di particelle prive di spin che nel caso di fermioni di spin 1/2.

b) Si supponga che le due particelle siano fermioni di spin 1/2 e che si trovino in un autostato dello spin totale ed in un autostato della Hamiltoniana con energia pari a quella del primo livello eccitato. Determinare la probabilità di trovare entrambe le particelle nella regione $x > 0$.

c) Alla Hamiltoniana del sistema viene aggiunta la seguente perturbazione:

$$\hat{V} = \lambda\,\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^4}\,\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 \tag{1}$$

con $0 < \lambda \ll 1$. Si determinino le correzioni al primo ordine in teoria delle perturbazioni ai primi due livelli energetici (sempre assumendo che le particelle abbiano spin 1/2)..

Esercizio 1 (1)

a)

Riscriviamo la parte angolare in termini di armoniche sferiche

$$|\psi\rangle = A\chi_{-1/2} - \frac{iB}{2}\sin^2\theta\,(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi})\chi_{1/2}$$

$$= \sqrt{4\pi}\,A\,Y_0^0\,\chi_{-1/2} - \frac{iB}{2}\,4\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(Y_2^2 - Y_2^{-2}\right)\chi_{1/2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{4\pi}A\,\underset{l\ l_z}{|0\,0\rangle}\underset{s_z}{|-1/2\rangle}}_{J_z = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\hbar} - 2iB\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\Big(\underbrace{|2\,2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle}_{\left(J_z = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\right)\hbar} - \underbrace{|2\,-2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle}_{J_z = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}}\Big)$$

Quindi

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = -\frac{3\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \left|2iB\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

Dato che $B>0$ $\qquad 2B\sqrt{\frac{2\pi}{15}} = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{4\pi}\,A\,\overset{|0\,0\rangle|\frac{1}{2}\rangle}{\downarrow} - \frac{i}{2}\left(|2\,2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle - |2\,-2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Se richiediamo che $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$4\pi|A|^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$4\pi|A|^2 = \frac{1}{2} \qquad |A|^2 = \frac{1}{8\pi} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{i}{2}\left(|2\,2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle - |2\,-2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

b) Gli stati sono $|l\,l_z\rangle|s_z\rangle$: rappresentano una base che però non corrisponde ad autofunzioni di H. Per avere una base di H, passiamo alla base $|j\,l\,s\,j_z\rangle_J$, dove $s = 1/2$ e $l = j \pm \frac{1}{2}$

Abbiamo quindi la base

$$\left.\begin{array}{l} |j\ j-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ j_z>_J \\ |j\ j+\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ j_z>_J \end{array}\right\} \quad E = \hbar\omega\left[j(j+1)+j_z\right]$$

con $j: \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

Ogni livello ha degenerazione 2

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad j \quad l \quad s \quad j_z$

<u>Stato FOND</u>:
$$\left.\begin{array}{l} |\tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}> \\ |\tfrac{1}{2}\ 1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}> \end{array}\right\} \quad E = \hbar\omega\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{4}$$

I ecc.
$$\left.\begin{array}{l} |\tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}> \\ |\tfrac{1}{2}\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}> \end{array}\right\} \quad E = \hbar\omega\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5\hbar\omega}{4}$$

II ecc.
$$\left.\begin{array}{l} |\tfrac{3}{2}\ 1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{3}{2}> \\ |\tfrac{3}{2}\ 2\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{3}{2}> \end{array}\right\} \quad E = \hbar\omega\left(\frac{15}{4}-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}\hbar\omega$$

c) Per calcolare l'evoluto temporale dobbiamo cambiare base $\{|l\ l_z>|s_z>\} \longrightarrow \{|j\ l\ s\ j_z>_J$

$= |j\ l\ j_z>_J$ ($s=1/2$ sempre e non lo indichiamo)

$$|0\ 0>|-\tfrac{1}{2}> = |\tfrac{1}{2}\ 0\ -\tfrac{1}{2}>_J$$

$$|2\ 2>|\tfrac{1}{2}> = |\tfrac{5}{2}\ 2\ \tfrac{5}{2}>_J$$

$$|2\ -2>|\tfrac{1}{2}> = \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|\tfrac{5}{2}\ 2\ -\tfrac{3}{2}>_J - \sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|\tfrac{3}{2}\ 2\ -\tfrac{3}{2}>_J$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\tfrac{1}{2}\ 0\ {-\tfrac{1}{2}}\right\rangle_J$$
$$-\frac{i}{2}\left|\tfrac{5}{2}\ 2\ \tfrac{5}{2}\right\rangle_J$$
$$+\frac{i}{2}\left[\sqrt{\tfrac{1}{5}}\left|\tfrac{5}{2}\ 2\ {-\tfrac{3}{2}}\right\rangle_J - \sqrt{\tfrac{4}{5}}\left|\tfrac{3}{2}\ 2\ {-\tfrac{3}{2}}\right\rangle_J\right]$$

Definiamo $\omega_1 = \frac{\omega}{4}$, $\omega_2 = \left(\frac{5\cdot 7}{4} + \frac{5}{2}\right)\omega = \frac{45}{4}\omega$

$$\omega_3 = \left(\frac{5\cdot 7}{4} - \frac{3}{2}\right)\omega = \frac{29}{4}\omega \qquad \omega_4 = \left(\frac{3\cdot 5}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}\omega$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_1 t}\left|\tfrac{1}{2}\ 0\ {-\tfrac{1}{2}}\right\rangle_J$$
$$-\frac{i}{2} e^{-i\omega_2 t}\left|\tfrac{5}{2}\ 2\ \tfrac{5}{2}\right\rangle_J$$
$$+\frac{i}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}}\, e^{-i\omega_3 t}\left|\tfrac{5}{2}\ 2\ {-\tfrac{3}{2}}\right\rangle_J - \frac{i}{2}\sqrt{\tfrac{4}{5}}\, e^{-i\omega_4 t}\left|\tfrac{3}{2}\ 2\ {-\tfrac{3}{2}}\right\rangle_J$$

$$P\left(E = \frac{\hbar\omega}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$P\left(E = \frac{45}{4}\hbar\omega\right) = \frac{1}{4}$$
$$P\left(E = \frac{29}{4}\hbar\omega\right) = \frac{1}{20}$$
$$P\left(E = \frac{9}{4}\hbar\omega\right) = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = 1$ ok

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \hbar\omega\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{45}{4} + \frac{1}{20}\cdot\frac{29}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{9}{4}\right] = \frac{15}{4}\hbar\omega$$

Ovviamente il valor medio e la probabilità non dipendono da t.

d)

Ritorniamo alla base $|l\, l_z\rangle|s_z\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_1 t} |0\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$- \frac{i}{2} e^{-i\omega_2 t} |2\,2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+ \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} e^{-i\omega_3 t}\left[\sqrt{\frac{4}{5}}\,|2\,-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}}\,|2\,-2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$
$$- \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} e^{-i\omega_4 t}\left[\sqrt{\frac{1}{5}}\,|2\,-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}}\,|2\,-2\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

$$\text{Prob}(L_z = 0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_1 t}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(L_z = 2\hbar) = \left|-\frac{i}{2} e^{-i\omega_2 t}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}(L_z = -\hbar) = \left|\frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\, e^{-i\omega_3 t}\sqrt{\frac{4}{5}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4}{5}}\, e^{-i\omega_4 t}\sqrt{\frac{1}{5}}\right|^2$$
$$= \frac{1}{25}\left|e^{-i\omega_3 t} - e^{-i\omega_4 t}\right|^2 =$$
$$= \frac{1}{25}\left|1 - e^{-i(\omega_3-\omega_4)t}\right|^2 =$$
$$= \frac{2}{25}\left(1 - \cos(\omega_3-\omega_4)t\right) \qquad \omega_3 - \omega_4 = \frac{29}{4}\omega - \frac{9}{4}\omega = 5\omega$$
$$= \frac{2}{25}(1 - \cos 5\omega t)$$

$$\text{Prob}(L_z = -2\hbar) = \left|\frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\, e^{-i\omega_3 t}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4}{5}}\sqrt{\frac{4}{5}}\, e^{-i\omega_4 t}\right|^2$$
$$= \frac{1}{100}\left|1 + 4e^{+i(\omega_3-\omega_4)t}\right|^2$$
$$= \frac{1}{100}\left(17 + 8\cos(\omega_3-\omega_4)t\right)$$
$$= \frac{1}{100}(17 + 8\cos 5\omega t)$$

Esercizio 2

Ciascuna particella è vincolata a restare in una buca tridimensionale. Gli stati sono (parte spaziale

$$|n_1\ n_2\ n_3\rangle \qquad E(n_1,n_2,n_3)=\frac{\hbar^2}{2m}\pi^2\left(\frac{n_1^2}{4a^2}+\frac{n_2^2}{4b^2}+\frac{n_3^2}{4c^2}\right)$$

[si noti che le buche hanno larghezza $2a, 2b, 2c$]

$$E_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

[Ricordare che $n_1, n_2, n_3 : 1, 2 \dots \infty$]

$$E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

($1/a < 1/b < 1/c$ dalla diseguaglianza riportata)

Livelli del sistema di due particelle (non considerando Pauli)

Stato f.: $|1\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 \qquad E = 2E_0$

I ecc $\begin{cases} |1\,1\,1\rangle_1 |2\,1\,1\rangle_2 \\ |2\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 \end{cases} \qquad E = E_0 + E_1$ deg. 2

Particelle bosoniche spin 0.

Stato f. $|1\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 \qquad E = 2E_0$ non deg.

I ecc. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\,1\rangle_1|2\,1\,1\rangle_2 + |2\,1\,1\rangle_1|1\,1\,1\rangle_2\right)$

$E = E_0 + E_1$ non deg.

Particelle di spin 1/2. Dobbiamo moltiplicare la parte spaziale per $|S\ S_z\rangle$, le autofunzioni dello spin totale

Stato f. $|1\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 |0\,0\rangle$ $E = 2E_0$ non deg.

Iecc. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 + |1\,1\,1\rangle_1 |2\,1\,1\rangle_2\right)|0\,0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,1\rangle_1 |1\,1\,1\rangle_2 - |1\,1\,1\rangle_1 |2\,1\,1\rangle_2 |1\,S_z\rangle\right.$

$E = E_0 + E_1$ degenerazione $1+3=4$

b)

Lo stato è dato da

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\right)\psi_1(y_1)\psi_1(z_1)\psi_1(y_2)\psi_1(z_2).$$

$\times$ funzione di spin

Vogliamo calcolare

$$\text{prob} = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \; \psi^* \psi \; \langle \text{fun spin} | \text{fun spin} \rangle$$

Gli integrali in y_1, z_1, y_2, z_2 danno 1 dato che $\psi_n(\cdot)$ è normalizzate. Rimane da calcolare

$$\text{prob} = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \; \frac{1}{2}\left|\psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\right|^2 =$$

Dato che le funzioni sono reali

$$\text{prob} = \frac{1}{2}\int_0^\infty dx_1 \int dx_2 \left(\psi_2(x_1)^2\psi_1(x_2)^2 + \psi_1(x_1)^2\psi_2(x_2)^2 \right.$$
$$\left. \pm 2\psi_1(x_1)\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\psi_2(x_2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx_1\, \psi_2(x_1)^2 \int dx_2\, \psi_1(x_2)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty dx_1\, \psi_1(x_1)^2 \int dx_2\, \psi_2(x_2)^2$$
$$\pm \int_0^\infty dx_1\, \psi_1(x_1)\psi_2(x_1) \int_0^\infty dx_2\, \psi_1(x_2)\psi_2(x_2)$$

Ora $\quad \psi_n(-x) = -(-1)^n \psi_n(x)$ (sono autofunzioni di $\stackrel{?}{I}$)

$\psi_n^2(-x) = +\psi_n^2(x)$

Quindi

$$\int_0^\infty dx\, \psi_n(x)^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n(x)^2 = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\text{prob} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\pm\left[\int_0^\infty dx\, \psi_1(x)\psi_2(x)\right]^2 = \frac{1}{4} \pm \left[\int_0^\infty dx\, \psi_1(x)\psi_2(x)\right]^2$$

Ora

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \qquad \psi_2 = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

in $[-a,a]$ (sono nulle per $|x|>a$)

$$\int_0^\infty dx\, \psi_1(x)\psi_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dy\, \cos y \sin 2y \qquad y = \frac{\pi x}{2a}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{4i}\int_0^{\pi/2} dy\, (e^{iy}+e^{-iy})(e^{2iy}-e^{-2iy})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi/2} dy\, (e^{3iy}+e^{iy}-e^{-iy}-e^{-3iy})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{3i}(\cancel{-}i-1) + \frac{1}{i}(\cancel{i}-1) + \frac{1}{i}(-\cancel{i}-1) + \frac{1}{3i}(\cancel{i}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(+\frac{i}{3} + i + i + \frac{i}{3}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{8}{3}i = \frac{4}{3\pi}$$

Quindi

$$\text{prob} = \frac{1}{4} \pm \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2$$

c) La perturbazione non dipende dallo spin.
e quindi non è necessario distinguere gli stati di spin: è diagonale nella base riportata per il I stato eccitato.

perturbazione sullo stato fond.

$$\langle \psi_{SF} | V | \psi_{SF} \rangle$$

Lo stato fondamentale è pari sotto parità per cui l'integrale è nullo
La perturbazione non cambia l'energia dello stato fondamentale.

I stato eccitato: Se $|\psi_\pm\rangle$ sono le due autofunzioni spaziali del I eccitato (il $\pm$ indicano le combinazioni pari e dispari) vogliamo calcolare

$$\langle \psi_\pm | \hat{V} | \psi_\pm \rangle =$$

(non va calcolato $\langle \psi_+ | \hat{V} | \psi_- \rangle$ per l'ortogonalità delle funzioni di spin)

$$= \langle \psi_\pm | V_x | \psi_\pm \rangle + \langle \psi_\pm | V_y | \psi_\pm \rangle + \langle \psi_\pm | V_z | \psi_\pm \rangle$$

dove $V_x = \lambda \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} x_1 x_2$, $V_y = \lambda \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} y_1 y_2$, ...

Ora $\psi_\pm$ sono pari sotto ~~$x_1 \to -x_1$ (oppure $x_2 \to -x_2$)~~
$y_1 \to -y_1$ (oppure $y_2 \to -y_2$)
$z_1 \to -z_1$ (oppure $z_2 \to -z_2$)

Quindi $\langle \psi_\pm | V_y | \psi_\pm \rangle = \langle \psi_\pm | V_z | \psi_\pm \rangle = 0$
Rimane

$$A \langle \psi_\pm | x_1 x_2 | \psi_\pm \rangle \qquad A = \lambda \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

Da cui

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, x_1 x_2\, \frac{1}{2}\left|\psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right|^2$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, x_1\, \psi_2(x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, x_2\, \psi_1(x_2)^2 \longrightarrow \text{integrali nulli per parità}$$

$$+\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, x_1\, \psi_1(x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, x_2\, \psi_2(x_2)^2 \longrightarrow \text{integrali nulli per parità}$$

$$\pm\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, x_1\, \psi_1(x_1)\psi_2(x_1) \int dx_2\, x_2\, \psi_1(x_2)\psi_2(x_2)$$

$$= \pm\frac{A}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \psi_1(x)\psi_2(x)\right]^2$$

Rimane quindi da calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \psi_1(x)\psi_2(x) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} dx\, x\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{a}{\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, y\cos y \sin 2y =$$

$$\cos y \sin 2y = \frac{1}{4i}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)\left(e^{2iy}-e^{-2iy}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{3iy}+e^{iy}-e^{-iy}-e^{-3iy}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 3y + \sin y\right) \quad \text{(form. prostaferesi)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{d}{dy}\cos 3y + \frac{d}{dy}\cos y\right)\cdot(-1)$$

$$= -\frac{a}{2\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, y\, \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3}\cos 3y + \cos y\right)$$

(integrazione per parti)

$$= \frac{a}{2\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \left(\frac{1}{3}\cos 3y + \cos y\right)$$

$$= \frac{a}{2\pi^2}\left[\frac{1}{9}\sin 3y + \sin y\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{a}{2\pi^2}\cdot 2\left(-\frac{1}{9}+1\right) = \frac{8}{9\pi^2}a$$

Quindi

$$\Delta E = \pm \frac{A}{2}\left(\frac{8}{9\pi^2}a\right)^2$$

Esame di Meccanica Quantistica, 25/11/2021 P

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ vincolata a muoversi su una sfera. La sua funzione d'onda è data da

$$|\psi\rangle = a(1+2i)Y_2^1(\theta,\phi)\,|+\tfrac{1}{2}\rangle + bY_1^1(\theta,\phi)\,|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

dove $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ sono gli autostati della componente z dello spin $\boldsymbol{S}$ e le costanti a a b sono reali positive.

a) Si calcolino a e b in modo che $|\psi\rangle$ sia normalizzata e che la probabilità di misurare $J^2 = 35\hbar^2/4$ sia $10/17$, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ ed $\boldsymbol{L}$ è l'operatore di momento angolare. Se viene effettuata una misura di J^2 su $|\psi\rangle$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

b) Vengono create due copie dello stato $|\psi\rangle$. Quindi, al tempo $t = 0$, su ciascuna di esse viene effettuata una misura di J^2, seguita immediatamente da una misura di S_z. Sulla prima copia la misura di J^2 dà $\frac{15}{4}\hbar^2$ e la misura di S_z dà $\frac{1}{2}\hbar$; si calcoli lo stato normalizzato $|B\rangle$ dopo le due misure.
Sulla seconda copia, la misura di J^2 dà $\frac{3}{4}\hbar^2$ e la misura di S_z dà $\frac{1}{2}\hbar$; si calcoli lo stato normalizzato $|C\rangle$ dopo le due misure.

c) Entrambi gli stati evolvono con Hamiltoniana

$$H = \omega S_x.$$

Si calcolino gli stati $|B(t)\rangle$ e $|C(t)\rangle$. Se viene effettuata una misura di J_z su di essi, quali valori si ottengono e con quale probabilità?
d) Si calcoli $|\langle B|L_x|C\rangle|$.

Esercizio 2. La dinamica di una particella priva di spin e di massa m, è descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$\hat{H}_0(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2 + 4\,\hat{y}^2 + 9\,\hat{z}^2\right). \tag{1}$$

1) Identificare tutti gli autovalori della Hamiltoniana H_0 di energia E tale che $E \leq 7\hbar\omega$. Per ogni livello energetico specificare il grado di degenerazione e determinare una base di autofunzioni.

Si consideri ora un sistema di 2 particelle identiche, governate dalla seguente Hamiltoniana

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{r}}_1,\hat{\mathbf{p}}_1) + \hat{H}_0(\hat{\mathbf{r}}_2,\hat{\mathbf{p}}_2). \tag{2}$$

2) Identificare tutti gli autovalori della Hamiltoniana H_2 di energia *totale* del sistema E tale che $E \leq 7\hbar\omega$. Per ogni livello energetico specificare il livello di degenerazione e determinare una base di autofunzioni. Si discuta sia il caso di particelle prive di spin che il caso di fermioni di spin 1/2.

Si riconsideri ora una singola particella priva di spin soggetta ad H_0. Viene introdotta la seguente perturbazione

$$\delta H_0 = \epsilon\,\frac{\hbar\omega}{L^3}\,\hat{x}\hat{y}\hat{z} \tag{3}$$

con $0 < \epsilon \ll 1$ e $L \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Esercizio 1

1)
$$|\psi\rangle = a(1+2i)\,|\overset{\ell\ m}{2\ 1}\rangle|\overset{s_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle + b\,|\overset{\ell\ m}{1\ 1}\rangle|\overset{s_z}{-\tfrac{1}{2}}\rangle$$

La condizione di normalizzazione impone

$$5|a|^2+|b|^2=1 \qquad (|1+2i|=\sqrt{5})$$

Riscriviamo $|\psi\rangle$ in termini di stati $|\ell\ J\ J_z\rangle_J$

$$|\psi\rangle = a(1+2i)\left[\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|2\ \tfrac{5}{2}\ \tfrac{3}{2}\rangle_J - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|2\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}\rangle_J\right] \leftarrow \left(\begin{matrix}\text{dal CG}\\ (2\times 1/2)\end{matrix}\right)$$

$$+\,b\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J\right] \leftarrow \left(\begin{matrix}\text{da CG}\\ (1\times 1/2)\end{matrix}\right)$$

$$\text{Prob}\left(J^2=\tfrac{35}{4}\hbar^2\right) = \text{prob}\left(j=\tfrac{5}{2}\right) = |a|^2\cdot 5\cdot \tfrac{4}{5}$$

Quindi

$$4|a|^2=\frac{10}{17} \qquad |a|^2=\frac{5}{34} \qquad |a|=\sqrt{\frac{5}{34}} \overset{(a>0)}{\Longrightarrow} a=\sqrt{\frac{5}{34}}$$

Quindi

$$|b|^2 = 1-5|a|^2 = 1-\frac{25}{34}=\frac{9}{34} \overset{(b>0)}{\Longrightarrow} b=\frac{3}{\sqrt{34}}$$

L'operatore J^2 può anche assumere i valori
$J^2=\frac{15}{4}\hbar^2$ $(j=\frac{3}{2})$ e $J^2=\frac{3}{4}\hbar^2$ $(j=\frac{1}{2})$

Quindi

$$\text{Prob}\left(J^2=\tfrac{15}{4}\hbar^2\right) = 5|a|^2\cdot\frac{1}{5} + |b|^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{34}+\frac{3}{34}=\frac{4}{17}$$

$$\text{Prob}\left(J^2=\tfrac{3}{4}\hbar^2\right) = |b|^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{9}{34}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{17}$$

(2)

b)

Prima copia

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{misura di } J} -a\sqrt{\tfrac{1}{5}}(1+2i)\,|2\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}\rangle_J + b\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$$= -a\sqrt{\tfrac{1}{5}}(1+2i)\Big[\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|\overset{l_z}{2}\ \overset{s_z}{-\tfrac{1}{2}}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\rangle\Big] \leftarrow \text{tutti stati con } l=2$$

(tabelle CG)

$$+\, b\sqrt{\tfrac{1}{3}}\Big[\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\rangle\Big] \leftarrow \text{stati con } l=1$$

$$= -a\sqrt{\tfrac{1}{5}}(1+2i)\Big[\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|\overset{l}{2}\ \overset{l_z}{2}\rangle|\overset{s_z}{-\tfrac{1}{2}}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\Big]$$

$$+\, b\sqrt{\tfrac{1}{3}}\Big[\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ 1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\Big]$$

RISCRITTURA CON $|l_z\, s_z\rangle \rightarrow |l\, l_z\rangle|s_z\rangle$

$$\xrightarrow[S_z]{\text{misura di}} -a\sqrt{\tfrac{1}{5}}(1+2i)\Big(-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\Big)$$

$$+\, b\sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \frac{a}{5}(1+2i)\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}\,b}{3}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

Lo stato non è normalizzato. Calcoliamo N in modo che

$$|B\rangle = N\Big[\frac{a}{5}(1+2i)\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}\,b}{3}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\Big]$$

soddisfi $\langle B|B\rangle = 1$

$$|N|^2\Big[\frac{a^2}{25}\cdot 5 + \frac{2}{9}b^2\Big] = 1$$

$$|N|^2\Big[\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{34} + \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{34}\Big] = 1 \qquad |N|^2 = \frac{3}{34} \qquad |N| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{3}}$$

$$|B\rangle = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{\sqrt{34}}(1+2i)\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{34}}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}(1+2i)\,|2\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

Seconda copia

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{di } J]{\text{misura}} b\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$$= b\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1 -\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\rangle\right] \quad \overset{l_z\ s_z}{} \leftarrow \text{qui } l=1$$

$$= b\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1 1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1 0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

$\qquad\qquad l\,l_z \quad s_z$

$$\xrightarrow[\text{di } S_z]{\text{misura}} b\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(-\tfrac{1}{3}\right)|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\xrightarrow{\text{normalizzazione}} |c\rangle = |1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

c)

Dobbiamo esprimere $|\tfrac{1}{2}\rangle_z$ ← autostato di S_z in termini degli autostati di S_x

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovettori :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z + |-\tfrac{1}{2}\rangle_z\right) = |\tfrac{1}{2}\rangle_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z - |-\tfrac{1}{2}\rangle_z\right) = |-\tfrac{1}{2}\rangle_x \end{aligned}\right\} \text{autovettori di } S_x$$

$$|\tfrac{1}{2}\rangle_z = {}_x\langle\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_z\,|\tfrac{1}{2}\rangle_x + {}_x\langle-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_z\,|-\tfrac{1}{2}\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_x + |-\tfrac{1}{2}\rangle_x\right)$$

Quindi

$$e^{-iHt/\hbar}|\tfrac{1}{2}\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2}|\tfrac{1}{2}\rangle_x + e^{i\omega t/2}|-\tfrac{1}{2}\rangle_x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\omega t/2}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z + |-\tfrac{1}{2}\rangle_z\right)$$

$$+ e^{i\omega t/2}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z - |-\tfrac{1}{2}\rangle_z\right)\Big)$$

$$= \cos\frac{\omega t}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_z - i\sin\frac{\omega t}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z$$

Quindi, al tempo t,

$$|B t\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{15}}(1+2i)\,|\overset{l\,l_z}{2\,1}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\overset{l\,l_z}{1\,0}\rangle\right]\times$$
$$\left(\cos\frac{\omega t}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_z - i\sin\frac{\omega t}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z\right]$$

$$|c t\rangle = |1\,0\rangle\left(\cos\frac{\omega t}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_z - i\sin\frac{\omega t}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z\right)$$

Su $|B\rangle$ [ricordare $J_z = L_z + S_z$]

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = \tfrac{3}{2}\hbar\right) = \frac{1}{15}|1+2i|^2\cos^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = \tfrac{1}{2}\hbar\right) = \frac{1}{15}|1+2i|^2\sin^2\frac{\omega t}{2} + \frac{2}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2} =$$
$$= \frac{1}{3}\sin^2\frac{\omega t}{2} + \frac{2}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = -\tfrac{1}{2}\hbar\right) = \frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

check: $\frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega t}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega t}{2} = 1$

Su $|c\rangle$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \sin^2\frac{\omega t}{2}$$

d)

$$L_x|\overset{l\,l_z}{1\,0}\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|1\,0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|1\,1\rangle + |1\,-1\rangle\right)$$

Nessuno di questi stati appare in $|B\rangle$. Quindi $\langle B|L_x|c\rangle = 0$

Esercizio 2

1) Si tratta di una Hamiltoniana separabile.
Se $|n\rangle$ sono gli autostati unidimensionali $(|n\rangle = \psi_n(x))$

$$E_{nmp} = \hbar\omega_x\left(n_x+\tfrac{1}{2}\right)+\hbar\omega_y\left(m+\tfrac{1}{2}\right)+\hbar\omega_z\left(p+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\omega_x=\omega,\quad \omega_y=2\omega,\quad \omega_z=3\omega$$

$$=\hbar\omega\left(n_x+\tfrac{1}{2}\right)+2\hbar\omega\left(m+\tfrac{1}{2}\right)+3\hbar\omega\left(p+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=\hbar\omega(n+2m+3p+3)$$

Autofunzioni $|n\rangle_x|m\rangle_y|p\rangle_z = \psi_n(x)\psi_m(y)\psi_p(z) = |n\,m\,p\rangle$

Livelli

	n	m	p		
$E=3\hbar\omega$	0	0	0	$\|0\,0\,0\rangle$	non degenere
$E=4\hbar\omega$	1	0	0	$\|1\,0\,0\rangle$	non degenere
$E=5\hbar\omega$	2	0	0	$\|2\,0\,0\rangle$	degeneraz. 2
	0	1	0	$\|0\,1\,0\rangle$	
$E=6\hbar\omega$	3	0	0	$\|3\,0\,0\rangle$	deg. 3
	1	1	0	$\|1\,1\,0\rangle$	
	0	0	1	$\|0\,0\,1\rangle$	
$E=7\hbar\omega$	4	0	0	$\|4\,0\,0\rangle$	deg. 4
	2	1	0	$\|2\,1\,0\rangle$	
	0	2	0	$\|0\,2\,0\rangle$	
	1	0	1	$\|1\,0\,1\rangle$	

2) Stati possibili (senza considerare Pauli)

$E=6\hbar\omega$ $\quad |0\,0\,0\rangle_1\,|0\,0\,0\rangle_2$

prima part. $\quad$ seconda particella

$E = 7\hbar\omega$ $\begin{cases} |000\rangle_1 \, |100\rangle_1 \\ |000\rangle_2 \, |100\rangle_1 \end{cases}$

Caso a: particelle prive di spin (spin 0)
Le funzioni d'onda devono essere simmetriche

$E = 6\hbar\omega \qquad |000\rangle_1 |000\rangle_2$ non deg.

$E = 7\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|100\rangle_1 |000\rangle_2 + |000\rangle_1 |100\rangle_2\right]$ non deg.

Caso b) Spin 1/2
Definiamo $|S \, S_z\rangle_S$ le autofunzioni di $\vec{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$.
(di S^2 e S_z).

$E = 6\hbar\omega \qquad |000\rangle_1 |000\rangle_2 \, |0\,0\rangle_S$

$E = 7\hbar\omega \qquad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|100\rangle_1 |000\rangle_2 + |000\rangle_1 |100\rangle_2\right] |0\,0\rangle_S \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|100\rangle_1 |000\rangle_2 - |000\rangle_1 |100\rangle_2\right] |1\, S_z\rangle \end{cases}$

degenerazione $1+3=4$

3)
Notiamo che l'operatore x soddisfa a

$$\langle n|x|m\rangle = 0 \quad \text{per} \quad |n-m| \neq 1$$

Infatti $x = A(a+a^+)$ per cui

$$\langle n|x|m\rangle = A\langle n|a|m\rangle + B\langle n|a^+|m\rangle$$

Uguale a zero se $n \neq m-1$

Uguale a zero se $n \neq m+1$

Livello $E = 3\hbar\omega$

$$\Delta E = \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \langle 000|xyz|000\rangle$$
$$= \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \langle 0|x|0\rangle\langle 0|y|0\rangle\langle 0|z|0\rangle = 0$$

Livello $E = 4\hbar\omega$ $\quad \Delta E = 0$

$E = 5\hbar\omega$ $\quad$ Tutti gli elementi di matrice sono nulli : $\Delta E = 0$
La degenerazione non è rimossa

Livello $E = 6\hbar\omega$
Ordiniamo gli stati $\quad |a\rangle = |300\rangle$, $|b\rangle = |110\rangle$, $|c\rangle = |001\rangle$

$$\langle a|\delta H_0|a\rangle = \langle b|\delta H_0|b\rangle = \langle c|\delta H_0|c\rangle = 0$$
$$\langle a|\delta H_0|b\rangle = \langle a|\delta H_0|c\rangle$$

Gli unici elementi di matrice non nulli sono
$\langle b|\delta H_0|c\rangle$ e $\langle c|\delta H_0|b\rangle = \langle b|\delta H_0|c\rangle^*$

Quindi
$$\langle b|\delta H_0|c\rangle = \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \langle 110|xyz|001\rangle$$
$$= \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \langle 1|x|0\rangle\langle 1|y|0\rangle\langle 0|z|1\rangle$$

Se definiamo gli stati con gli operatori $a, a^\dagger$, $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$
abbiamo, per un oscillatore di pulsazione ω

$$\langle 1|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 1|a + a^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Quindi

$$\langle b|\delta H_0|c\rangle = \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_x}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_y}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}} =$$
$$= \epsilon \frac{\hbar\omega}{L^3} \frac{1}{\sqrt{2}} L \cdot \frac{1}{2} L \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} L = \frac{1}{4\sqrt{3}} \epsilon \hbar\omega$$

Matrici di δH_0

$$\delta H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\epsilon\hbar\omega}{4\sqrt{3}}$$

Autovalori della matrice $0, \pm 1$. Quindi

$$E = 6\hbar\omega \begin{cases} 6\hbar\omega + \dfrac{\epsilon\hbar\omega}{4\sqrt{3}} \\ 6\hbar\omega \\ 6\hbar\omega - \dfrac{\epsilon\hbar\omega}{4\sqrt{3}} \end{cases}$$

La degenerazione è rimossa

4)
Le autofunzioni dell'oscillatore armonico sono

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2} \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x = \frac{x}{L}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{2}\,\xi\, e^{-\xi^2/2}$$

Possiamo quindi scrivere

$$|000\rangle = K e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)}$$

$$|010\rangle = K\sqrt{2}\,\xi_y\, e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)}$$

$$|100\rangle = K\sqrt{2}\,\xi_x\, e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)}$$

dove $K = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\,2\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\,3\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

Quindi

$$\psi = \frac{N}{k}\left[\sqrt{2}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\rangle\right]$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Longrightarrow \quad \frac{|N|^2}{k^2}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad |N|^2 = \frac{k^2}{3} \xrightarrow[\text{di fase}]{\text{scelta}} N = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle\right]$$

Quindi

$$|\psi t\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(e^{-3i\omega t}|000\rangle + \frac{1}{2}e^{-4i\omega t}|100\rangle + \frac{1}{2}e^{-5i\omega t}|010\rangle\right)$$

$$\underset{(\times e^{3i\omega t})}{=} \sqrt{\frac{2}{3}}\left(|000\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}|100\rangle + \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}|010\rangle\right)$$

Calcoliamo

$$\langle\psi t|x|\psi t\rangle = \frac{2}{3}\left(\langle 000| + \frac{1}{2}e^{i\omega t}\langle 100| + \frac{1}{2}e^{2i\omega t}\langle 010|\right)|x|$$
$$\left(|000\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}|100\rangle + \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}|010\rangle\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\langle 000|x|100\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}e^{i\omega t}\langle 100|x|000\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t = \frac{\sqrt{2}}{3}L\cos\omega t$$

$$\langle\psi t|y|\psi t\rangle = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\langle 000|y|010\rangle e^{-2i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 010|y|000\rangle e^{2i\omega t}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\cdot 2\omega}}\left(e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}\right)$$

$$= \frac{L}{3}\cos 2\omega t$$

$$\langle\psi t|z|\psi t\rangle = 0$$

Per ricavare i valori medi di $\bar{p}$, utilizziamo l'equazione di Hamilton $\langle p \rangle = \frac{d}{dt} \langle q \rangle m$

$$\langle \psi t | p_x | \psi t \rangle = m \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} L\omega \sin \omega t \right) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin \omega t \sqrt{m\hbar\omega}$$

$$\langle \psi t | p_y | \psi t \rangle = m \frac{L}{3} \left(-2\omega \sin 2\omega t \right) = -\frac{2}{3} \sqrt{m\hbar\omega} \sin 2\omega t$$

$$\langle \psi t | p_z | \psi t \rangle = 0$$

3) Si determinino le correzioni al primo ordine in teoria delle perturbazioni ai primi 4 livelli energetici, discutendo l'eventuale rimozione delle degenerazioni.

At un certo istante $t = 0$ lo stato quantistico della particella è descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\langle x, y, z|\psi\rangle = \psi(x, y, z) = \mathcal{N}\left(\sqrt{2} + \xi_x + \xi_y\right) e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)/2}, \tag{4}$$

dove $\xi_x \equiv \frac{x}{L}$, $\xi_y \equiv \frac{\sqrt{2}y}{L}$, $\xi_z \equiv \frac{\sqrt{3}z}{L}$ e $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

4) Si determini $|\mathcal{N}|$ e il valore di aspettazione degli operatori associati ai vettori posizione e impulso al variare del tempo: $\langle\psi|\hat{\mathbf{r}}|\psi\rangle_t$ e $\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle_t$. Si ignori l'effetto della perturbazione δH_0 per questa parte dell'esercizio.