Esercizi proposti di Calcolo e Biostatistica- Sc. Biologiche - A.A. 2011-2012

N.B. Svolgere gli esercizi, giustificando brevemente i passaggi svolti.

1. Una misura ripetuta di densità di una sostanza in soluzione dè i seguenti risultati in g/dm^3

$$1,11; \quad 0,85; \quad 1,12; \quad 1,11; \quad 0,89; \quad 0,95; \quad 1,12; \quad 1,16; \quad 0,79; \quad 1,00.$$

Trovare la media, la mediana e la varianza campionaria del dato campione.

Soluz. Il campione ordinato è

$$0,79; \quad 0,85; \quad 0,89; \quad 0,95; \quad 1,00; \quad 1,11; \quad 1,11; \quad 1,12; \quad 1,12; \quad 1,16.$$

La media è $1,01$, la mediana $1,055$. Gli scarti (ordinati) e i loro quadrati sono

$$-0,22; \quad -0,16; \quad -0,12; \quad -0,06; \quad -0,01; \quad 0,1; \quad 0,1; \quad 0,11; \quad 0,11; \quad 0,15.$$

$$0,0484; \quad 0,0256; \quad 0,0144; \quad 0,0036; \quad 0,0001; \quad 0,01; \quad 0,01; \quad 0,0121; \quad 0,0121; \quad 0,0225.$$

La varianza campionaria è $0,1588/10 = 0,01588$.

---

2. Trovare il dominio, gli eventuali asintoti verticali ed orizzontali, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i massimi e minimi e disegnare il grafico delle funzioni

$$\bigcirc\ f(x) = \frac{e^{2x}}{x+5}, \qquad \bigcirc\ g(x) = \frac{e^{3x}}{5-x}.$$

Soluz. Dominio f è $x \neq -5$, e dominio di g è $x \neq 5$.
Asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-5+} f(x) = \lim_{x\to5-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-5-} f(x) = \lim_{x\to5+} g(x) = -\infty.$$

Derivate

$$f'(x) = e^{2x}\frac{2x+9}{(x+5)^2} \qquad g'(x) = e^{3x}\frac{16-3x}{(5-x)^2}$$

$f(x)$ ha un minimo relativo per $x = -9/2$ e $g(x)$ un massimo relativo per $x = 16/3$, che valgono rispettivamente

$$f(-9/2) = 2e^{-9}, \qquad g(16/3) = -3e^{16}$$

---

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^2 x(x^2-1)dx, \qquad \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx, \qquad \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x^2)}{x}dx.$$

Soluz.

$$\int_0^2 x(x^2-1)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-1)2xdx = 2 \qquad \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx = 0$$

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x^2)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^\pi} \sin(2\ln x)\frac{2dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin y\, dy = 0.$$

4. Una fabbrica produce televisori di tipo X, la cui durata di funzionamento è una variabile aleatoria esponenziale con valore medio 5 anni. Calcolare: i) la probabilità che un televisore di tipo X preso a caso duri meno di un anno, e ii) la probabilità che duri più di 10 anni.

Soluz. Detta T la durata, sappiamo che è distribuita esponenzialmente con densità $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$, per cui

$$P(T<1)=\frac{1}{5}\int_0^1 e^{-\frac{x}{5}}dx = 1-e^{-\frac{1}{5}}, \qquad P(T>10)=\frac{1}{5}\int_{10}^{\infty} e^{-\frac{x}{5}}dx = e^{-2}$$

5. Una popolazione di pesci è costituita per il 75% da femmine e per il 25% da maschi. Si effettuano quattro catture con un procedimento tale che ciascun individuo può essere indifferentemente catturato, indipendentemente dal sesso.
i) Qual'è la probabilità che i pesci catturati siano tutti dello stesso sesso?
ii) Qual'è il numero medio di femmine nel campione?
iii) Se il numero di femmine catturate è due, siamo entro la deviazione standard dalla media?

Soluz. i) La probabilità che siano tutti maschi è $(1/4)^4$ e la probabilità che siano tutte femmine è $(3/4)^4$. In totale quindi la probabilità richiesta è $\frac{3^4+1}{4^4}=\frac{82}{256}\approx 0,32$.
ii) Il numero medio di femmine nel campione è $\frac{3}{4}\cdot 4 = 3$.
iii) La varianza del numero di femmine nel campione (= varianza del numero dei maschi) è $\sigma^2 = 4\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$, per cui $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Se le femmine sono due siamo fuori.

6. Calcolare la media integrale nell'intervallo [0.3] della funzione $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$.

Soluz. Per definizione di media integrale abbiamo

$$\frac{1}{3}\int_0^3 xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \frac{e^9-1}{3}.$$

7. Il pubblico sportivo di un match tra le squadre delle città A e B è per il 40% proveniente da A e per il 60% da B. Di quelli della città A il 90% è tifoso della propria squadra, e il 10% della squadra avversa, mentre dei provenienti da B il 70% è tifoso della propria squadra e il 30% della squadra avversa.
i) Preso uno spettatore a caso, con che probabilità è tifoso della squadra di A?
ii) Se lo spettatore risulta tifoso della squadra di B, con che probabilità proviene anche dalla città B?

Soluz. Definiamo gli eventi $T_A = \{\text{tifoso della squadra A}\}$, $T_B = \{\text{tifoso della squadra B}\}$, mentre A e B indicano le provenienze.
i) $P(T_A) = P(A)P(T_A|A) + P(B)P(T_A|B) = 0,4\cdot 0.9 + 0,6\cdot 0,3 = 0,54$.
ii) $P(B|T_B) = P(T_B|B)P(B)/P(T_B) = 0,7\cdot 0,6/0,46 \approx 0,91$.