Corso: Calcolo e Biostatistica- Sc. Biologiche - AA 2012-13

Esercizi in preparazione della seconda prova di esonero

N.B. Sono inclusi anche esercizi già svolti alla lavagna durante le lezioni, a beneficio di chi era assente o distratto.

A. Calcolo differenziale.

1. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza, e i massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x^2-2x}$$

nell'intervallo chiuso $[-2, 1]$. Se ne tracci un grafico qualitativo.

---

2. Stabilire il dominio di definizione, gli eventuali asintoti orizzontali e verticali, gli intervalli di crescenza e decrescenza, e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti delle funzioni

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x}, \qquad g(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4x}.$$

Si tracci un grafico qualitativo delle due funzioni discutendo le somiglianze e le differenze.

---

3. Stabilire il dominio di definizione, gli eventuali asintoti orizzontali e verticali, gli intervalli di crescenza e decrescenza, e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{1-x^2}, \qquad g(x) = \frac{e^x}{x+3}.$$

Si tracci un grafico qualitativo delle due funzioni discutendo le somiglianze e le differenze.

---

4. Stabilire il dominio di definizione, gli eventuali asintoti orizzontali e verticali, gli intervalli di crescenza e decrescenza, e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti delle funzioni

$$f(x) = \frac{x}{2-x}, \qquad g(x) = \frac{x^2}{x+3}.$$

Si tracci un grafico qualitativo delle due funzioni discutendo le somiglianze e le differenze.

---

5. Stabilire il dominio di definizione, gli eventuali asintoti orizzontali e verticali, gli intervalli di crescenza e decrescenza, e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti delle funzioni

$$f(x) = \ln\left(3x^2 - 2x + 1\right), \qquad g(x) = \sqrt{x^2+3x+4}.$$

Si tracci un grafico qualitativo delle due funzioni discutendo le somiglianze e le differenze.

---

6. Trovare l'equazione della retta tangente nel punto $P = (3, f(3))$ al grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{3}-1}.$$

---

7. Si consideri, nella semiretta $x \in [0, +\infty)$, la funzione

$$F(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t}dt.$$

Si calcoli il limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)dx$ e si trovino gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti di $F(x)$.

B. Calcolo integrale.

8. Calcolare l'area compresa tra il semiasse delle ascisse positive, il semiasse delle ordinate positive e il grafico della funzione

$$f(x) = 3 - \frac{x^2}{3}.$$

---

9. Calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^{\pi} e^{\sin x} \cos x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} dx.$$

---

10. Calcolare il valor medio (media integrale) della funzione $f(x) = x \cos \frac{x^2}{2}$ nell'intervallo $[0, \sqrt{\pi}]$.

---

11. Calcolare l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = xe^x$, dall'asse delle x e dalle rette $x = 0$ e $x = 2$.

---

12. Trovare un numero $k > 2$ tale che

$$\int_2^k \frac{x \, dx}{x^2 - 3} = 1.$$

Questo numero è unico?

---

13. Calcolare gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \qquad \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx, \qquad \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \sigma > 0.$$

---

14. Calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x \cos x^2}{2 + \sin x^2} dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{(1+2x^2)^2}, \qquad \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{(1+x^3)^2}$$

---

15. Calcolare i valori della variabile x nell'intervallo chiuso $[0, 2]$ per i quali la funzione

$$F(x) = \int_0^x \ln(t + 1/3) dt$$

assume massimi e minimi relativi. (*Non si richiede il calcolo di tali massimi e minimi.*)

---

16. Calcolare l'area compresa tra la parabola $y = x^2/2$ e la retta orizzontale $y = 2$.

C. Probabilità e statistica.

17. Si consideri la probabilità continua uniforme sull'intervallo $I = [-1, 2]$ (cioè la distribuzione uniforme di un punto a caso x si I). Calcolare il valor medio della variabile aleatoria $F(x) = x^2$ e la probabilità $P(F(x) > 1)$.

---

18. I numeri di insetti trovati in una trappola feromonica in visite successive sono dati dalla successione

$$2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 5,\ 4,\ 0,\ 2.$$

Trovare la media campionaria, la mediana, la varianza campionaria e il quantile q_{25}.

---

19. I pazienti di un'unità sanitaria sono registrati in due elenchi: i pazienti dell'elenco A sono del gruppo sanguigno $Rh-$ per il 20%, e quelli dell'elenco B lo sono per il 30%. Si prende un elenco a caso, da esso si sceglie una cartella clinica a caso, e si registra il gruppo sanguigno del paziente. L'operazione, o meglio, le due operazioni (scelta dell'elenco e scelta della cartella clinica), sono ripetute per tre volte in condizioni identiche.
Sia $N \in \{0, 1, 2\}$ il numero di pazienti $Rh-$ registrati. Calcolare la probabilità $P(N = 1)$ e il valor medio $M(N)$.

---

20. Una popolazione di conigli è costituita per l' 80% da individui di provenienza A, affetti da mixomatosi con probailità $p_a = 0,03$ e per il 20% da individui di provenienza B, affetti da mixomatosi con probailità $p_b = 0,3$.
i) Si prende un individo a caso nella popolazione totale. Qual'è la probabilità che sia affetto da mixomatosi?
ii) Si ripete l'operazione per otto volte in condizioni identiche, e sia N il numero di conigli infetti trovati nel campione di otto rilievi. Calcolare il valor medio e la varianza di N.

---

21. Un call center raccoglie le chiamate da tre diverse città, A, B, C. Le chiamate da ciascuna città in una certa ora sono possoniane indipendenti con valori medi rispettivamente $\rho_A = 1$, $\rho_B = 2$ e $\rho_C = 3$.
i) Qual'è la probabilità che nella data ora arrivi un sola chiamata?
ii) Qual'è il valor medio del numero delle chiamate nella data ora?

---

22. Un giocatore lancia per tre volte un dado. Ad ogni lancio, se esce 3 incassa 5 euro, altrimenti paga un euro. Sia V la somma vinta (o persa se $V < 0$) alla fine del gioco.
i) Calcolare la probabilità che sia $V > 0$.
ii) Calcolare il valor medio e la varianza di V.
Suggerimento: la somma vinta (o persa) è composta di tre somme parziali vinte (o perse) in ciascuna prova.

---

23. Un allevamento bovino è infettato dal virus V di cui soffre il 20% dei capi nella stalla A e l'80% nella stalla B. Il veterinario R effettua un esame prelevando un bovino a caso nella stalla A e un bovino a caso nella stalla B. Il suo collega S preleva un bovino a caso nella stalla A, indipendentemente da R, ma esamina lo stesso bovino del collega per la stalla B.
Siano N_R, N_S i numeri dei capi trovati infetti da R e da S rispettivamente. Trovare media e varianza delle variabili aleatorie N_R, N_S, nonchè la loro covarianza e il loro coefficiente di correlazione.

---

24. Riportiamo i valori y_i, $i = 1, \dots, 5$ del peso di una cultura batterica (in kg) in funzione del tempo t_i (in giorni):

$$t_1 = 0,2 \quad t_2 = 0,3 \quad t_3 = 0,5 \quad t_4 = 0,7 \quad t_5 = 0,8$$

$$y_1 = 1,1 \quad y_2 = 1,2 \quad y_3 = 1,6 \quad y_4 = 1,6 \quad y_5 = 1,8$$

Trovare la covarianza campionaria e la retta di regressione lineare.

Soluzioni sintetiche o parziali di alcuni esercizi.

1. La derivata è $2(x+1)e^{-x^2-2x}[1-(x+1)^2]$, e si annulla nei punti $x=-2,-1,0$. In $x=-1$ c'è un minimo assoluto, perchè la funzione vale 0 e negli altri punti è positiva. In $x=-2$ e in $x=0$ la funzione vale 1 e c'è un massimo locale, che è anche assoluto. In $x=1$ la funzione ha un minimo locale che vale $4e^{-3}$.

2. f ha $y=0$ come asintoto orizzontale e $x=0$ e e $x=-4$ come asintoti verticali, mentre $g(x)$ ha $y=1$ come asintito orizzontale egli stessi asintoti verticali di f.

f è sempre decrescente e quindi non ha massimi o minimi. Mentre la derivata di g è

$$g'(x) = 8\frac{(x-2)(x+1)}{(x^2+4x)^2}$$

e si annulla in $x=2$ dove c'è un minimo relativo e in $x=-1$ dove c'è un massimo relativo.

3. f ha $y=0$ come asintoto orizzontale per $x\to-\infty$, e asintoti verticali $x=\pm1$, mentre g ha lo stesso asintoto orizzontale di f e asintoto verticale di $x=-3$. f è piuttosto difficile da studiare perchè la derivata è

$$f'(x) = \frac{x\ e^x}{(1-x^2)^2}(x-x^3+2)$$

e quindi comporta lo studio di un'equazione cubica, che comunque si può fare qualitativamente.

4. f ha asintoto orizzontale $y=-1$ e asintoto verticale $x=2$. La derivata è sempre positiva su tutto il dominio e quindi non ha nè massimi nè minimi.

g tende a $\pm\infty$ per $x\to\pm\infty$ ed ha asintoto verticale $x=-3$. La derivata si annulla per $x=0$ dove c'è un minimo e per $x=-6$ dove c'è un massimo.

5. Il dominio di f è tutto R perchè $3x^2-2x+1>0$ per ogni x (vedere il discriminante). Inoltre per $x\to\pm\infty$ si ha $f(x)\to+\infty$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{6x-2}{3x^2-2x+1}$$

e si annulla per $x=1/3$, dove la funzione ha un minimo assoluto.

Anche Il dominio di g è tutto R, e i limiti per $x\to\pm\infty$ sono gli stessi. Ha un minimo in $x=-3/2$.

6. $f(3)=1$ mentre $f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}-1}$, per cui $f'(x)=1/3$. La retta è $y-1=\frac{1}{3}(x-3)$.

7. Per $x\to\infty$ si ha $F(x)\to0$. Inoltre $F'(x)=(x-1)e^{-x}$ che si annulla solo per $x=1$. Si tratta di un minimo.

8. $f(x)$ interseca l'asse delle x nel punto $x=3$. Quindi l'area da calcolare è

$$\int_0^3 f(x)dx = 9-\frac{1}{3}\int_0^3 x^2dx = 6.$$

9. Per il primo una primitiva è e^{sinx} e per il secondo $-\frac{1}{2}\ln(1+\cos(2x))$.

10. la media è

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin(0)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

11. La primitiva è xe^x-e^x e quindi

$$\int_0^2 xe^x dx = e^2+1.$$

12. La primitiva è $1/2\ln(x^2-3)$. La soluzione è univa perchè la funzione $\frac{x}{x^2-3}$ è positiva per $x\geq2$.

13. Per il primo si osservi che la primitiva è $1/2(1+\sqrt{x})$. Il secondo si integra per parti e il risultato è $1/4$. Per il terzo la primitiva è $\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

14. Sono tutti risolubili osservando che il numeratore, a meno di un fattore, è la derivata el denominatore.

15. Per il teorema di Torricelli si ha $F'(x) = \ln(x + 1/3)$, e quindi la derivata si annulla per $x = 2/3$, dove c'è un minimo.

16. Le intersezioni $x^2/2 = 2$ sono nei punti $x = \pm 2$, per cui l'area è

$$\int_{-2}^{2} (2 - \frac{x^2}{2}) dx.$$

17. $M(F) = 3$, $P(F(x) > 1) = \frac{1}{3}$.

18. $\bar{x} = 2$; mediana $= 2$; varianza campionaria $= 2,4$; $q_{25} = 1$.

19. In una prova la probabilità di ottenere $Rh-$ è $p = \frac{0,2+0,3}{2} = 0,25$.
Poichè sono indipendenti $P(N = 1) = 3 \cdot 0,25 \cdot (0,75)^2$ e $M(N) = 3 \cdot 0,25$.

20. i) $p = 0,8 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,084$, $M(N) = 8p$, $Var(N) = 8p(1-p)$.

21. i) $5e^{-5}$, $M(N) = 5p$.

22. La probabilità di incassare 5 euro ogni volta è 1/6. i) Quindi $P(V > 0) = (5/6)^3$. La vincita V_i di ogni giocata, $i = 1, 2, 3$ ha media $M(V_i) = 0$, e $V = V_1 + V_2 + V_3$. ii) Quindi $M(V) = 0$ e $Var(V) = 3Var(V_1) = 3 \cdot 5 = 15$.

23. Sia $N_R = \xi_1^A + \xi_B$, $N_S = \xi_2^A + \xi_B$, dove $\xi_1^A = 1$ se il bovino di R dalla stalla A è infetto e 0 se non lo è, e ξ_2^A, ξ^B hanno lo stesso significato per il bovino di S dalla stalla A e per il bovino comune della stalla B. Le tre variabili sono indipendenti.
Quindi $M(N_R) = M(N_s) = 0,2 + 0,8 = 1$, $Var(N_R) = Var(N_s) = 2(0,2 \cdot 0,8) = 0,32$, e

$$M(N_R N_S) = M(\xi_1^A \xi_2^A + \xi_B(\xi_1^A + \xi_2^A) + \xi_B^2) = (0,2)^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 = 1,16.$$

Pertanto $cov(N_R, N_S) = 0,16$ e $\rho_{N_R,N_S} = \frac{0,16}{0,32} = 1/2$.

24. Si ha $\bar{t} = 0,5$, $\bar{y} = 0,73$. Inoltre la $\sigma_t^2 = 0,052$. Si calcola poi

$$\sigma_{t,x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$$

e si trova il coefficiente m della retta $m = \frac{\sigma_{t,x}}{\sigma_t^2}$.