Esercizi di CALCOLO e BIOSTATISTICA (19. 10. 2012)

ESERCIZIO 1. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (3, 2)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (0, 2)$, trovare il vettore combinazione lineare $\mathbf{w} = \mathbf{v_1} + 2k\mathbf{v_2} - 3k\mathbf{v_3}$ con $k \in \mathbf{R}$, e dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali $\mathbf{w}$ é perpendicolare a $\mathbf{v_2}$. Trovare inoltre, se esistono, i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v_1} + 2k\mathbf{v_2}$ é parallelo al vettore $\mathbf{v_3}$.

ESERCIZIO 2. Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $P_0 = (1, 2)$ ed è ortogonale al vettore $v = (1, 1)$. La retta trovata ha intersezione con la bisettrice $y + x = 0$?

ESERCIZIO 3. Dati il vettore v e la matrice A nelle forme:

$(a)\, v = (1, 2),\ A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -4k \end{pmatrix}$ $(b)\, v = (4, -2),\ A = \begin{pmatrix} -16k & -2 \\ 2 & 4k \end{pmatrix}$ $(c)\, v = (3, -1),\ A = \begin{pmatrix} 9k & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$

per quale valore di k il problema $A \cdot w = v$, con $w = (x, y)$ non si puó risolvere? Trovare almeno un vettore w perpendicolare a v ed avente modulo 1.

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

provare che se det $A = 0$, allora i vettori riga $v_1 = (a_{11}, a_{12})$ e $v_2 = (a_{21}, a_{22})$ hanno la stessa direzione.

ESERCIZIO 5. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

dire per quale matrice A dei coefficienti, per quale vettore w, termine noto, il sistema si scrive nella forma $A \cdot v = w$, dove $v = (x, y)$ é il vettore incognito. Senza risolvere il sistema, si puó dire, motivando la risposta, se ammette una, nessuna o infinite soluzioni? Verificare la risposta risolvendo il sistema.

ESERCIZIO 6. Una popolazione P di animali viene divisa in "giovani" G e "adulti" A e, per studiarne quantitativamente l'evoluzione, si rappresenta la popolazione come il vettore $P = (G, A)$. Quando si inizia lo studio, si ha $P = (50, 50)$, poi si osserva sperimentalmente che dopo il tempo T risulta $P_T = (G_T, A_T) = (35, 45)$.
Si ripete l'esperimento nelle stesse condizioni e se inizialmente é $P = (60, 200)$, dopo il tempo T risulta $P_T = (140, 54)$. Scrivere in forma di percentuali gli elementi della matrice E per la quale risulta $E \cdot P = P_T$.
Spiegare a parole sia il significato concreto dell'operazione $E \cdot P = P_T$, sia quello dei valori degli elementi della matrice E.

SOLUZIONI

ES. 1 Osserviamo subito che si ha

$2k\mathbf{v_2} = (-2k, 2k)$
$(-3)k\mathbf{v_3} = (0, -6k)$

quindi $\mathbf{w} = \mathbf{v_1} + 2k\mathbf{v_2} - 3k\mathbf{v_3} = (3-2k, 2+2k-6k) = (3-2k, 2-4k)$.
Se $\mathbf{w}$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{v_2}$, deve essere $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v_2} = 0$, cioé

$$(3-2k)(-1) + (2-4k)(1) = 2k - 3 + 2 - 4k = -2k - 1 = 0$$

quindi deve essere $k = -1/2$.

Il vettore $\mathbf{v_3} = (0, 2)$ é diretto come l'asse y di un riferimento cartesiano; tenendo conto del fatto che il vettore $\mathbf{v_1} + 2k\mathbf{v_2}$ ha componenti $(3-2k, 2+2k)$, questo vettore risulta diretto come l'asse y se $3-2k = 0$, cioé se $k = 3/2$. Per questa scelta di k il vettore $\mathbf{v_1} + 2k\mathbf{v_2}$ ha componenti $(0, 5)$.

ES. 2 Una generica retta del piano ha equazione $y = mx + c$; se la retta deve passare per il punto $P_0 = (1, 2)$ si deve avere $2 = m + c$ quindi

$$c = 2 - m. \qquad (*)$$

Un vettore $w = (a, b)$ è ortogonale al vettore $v = (1, 1)$ (ed ha quindi la stessa direzione della retta che stiamo cercando) se si ha $w \cdot v = 0$, cioé se $a + b = 0$ o, ció che é lo stesso se $a = -b$ e le componenti di w sono $(-b, b)$.
Questo vettore ha direzione $m_w = b/(-b) = -1$ (quella della bisettrice del II e IV quadrante) e questa deve essere anche l'inclinazione della retta che stiamo cercando, cioé si deve avere $m = m_w = -1$. Sostituendo questo valore nella $(*)$ si trova $c = 2 - (-1) = 3$ e la retta richiesta ha equazione $y = -x + 3$. La retta che abbiamo trovato non ha intersezione con la la bisettrice $y + x = 0$ ($y = -x$) perché é ad essa parallela.

ES. 3 Risolviamo il caso (a). Il problema non si puó risolvere se il vettore $A \cdot w$ non ha la stessa direzione di v. Ció si realizza se $det\ A = 0$, infatti in questo caso A ha le righe tra loro proporzionali e il vettore $A \cdot w$ ha come direzione il fattore di proporzionalitá tra le righe di A. Se la direzione del vettore dato v non é uguale a questo fattore di proporzionalitá il problema non si risolve.
Dato che si ha

$$det\ A = -4k^2 + 1,$$

risulta $det\ A = 0$ se $4k^2 - 1 = 0$ cioé se $k = \pm 1/2$, e per questi valori di k il problema non ha soluzione.

(Si puó verificare infatti che

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -4k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - y \\ x - 4ky \end{pmatrix},$$

e se $k = 1/2$ il vettore $(kx - y, x - 4ky)$ diventa $(x/2 - y, x - 2y) = (x/2 - y, 1/2(x/2 - y))$ e ha direzione $m = [1/2(x/2 - y)]/(x/2 - y)] = 1/2$. Il vettore $v = (1, 2)$ ha invece direzione $m_v = 2$, quindi $A \cdot w$ non sará mai uguale al vettore v. Il conto é analogo per $k = -1/2$).

Il vettore $w = (x, y)$ é perpendicolare a $v = (1, 2)$ se si ha $x + 2y = 0$ cioé $x = -2y$ e quindi se $w = (-2y, y)$. Questo vettore ha modulo 1 se si ha

$$\sqrt{4y^2 + y^2} = \sqrt{5y^2} = 1$$

quindi se $y = \pm\sqrt{1/5}$.
In definitiva esistono 2 vettori che hanno le proprietá richieste e sono $w_1 = (-2\sqrt{1/5}, \sqrt{1/5})$ e $w_2 = (2\sqrt{1/5}, -\sqrt{1/5})$.

I casi (b) e (c) si trattano nello stesso modo e (b) non si risolve se $k = \pm 1/4$, mentre (c) non si risolve se $k = \pm 1/3$.
Nel caso (b) i vettori perpendicolari a $v = (4, -2)$ con modulo 1 sono $w_1 = (\sqrt{1/5}, 2\sqrt{1/5})$ e $w_2 = (-\sqrt{1/5}, -2\sqrt{1/5})$, mentre nel caso (c) i vettori perpendicolari a $v = (3, -1)$ sono $w_1 = (\sqrt{1/10}, 3\sqrt{1/10})$ e $w_2 = (-\sqrt{1/10}, -3\sqrt{1/10})$.

ES. 4 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha det $A = 0$ se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ e quindi se $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.
I vettori $v_1 = (a_{11}, a_{12})$ e $v_2 = (a_{21}, a_{22})$ hanno direzione $m_1 = a_{12}/a_{11}$ e $m_2 = a_{22}/a_{21}$.
Se $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, dividendo per $a_{11}a_{21}$ ambo i membri, si ha anche

$$\frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2$$

quindi se il determinante di A é nullo, v_1 e v_2 devono avere la stessa direzione.

ES. 5 La matrice A dei coefficienti del sistema é

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre il vettore termine noto é $w = (1, 2)$. Eseguendo il prodotto righe per colonne $A \cdot v$, con $v = (x, y)$, si ha

$$\begin{pmatrix} -x/2 - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

che é proprio il vettore a primo membro del sistema dato.
Visto che det$A = -1 - (-1) = 0$, il sistema puó ammettere nessuna o infinite soluzioni. Osservando che il vettore $A \cdot v$ si puó scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} -x/2 - y \\ (-2)[-x/2 - y] \end{pmatrix}$$

possiamo concludere che questo vettore ha direzione $m = -2$. Visto che il termine noto ha direzione $m_w = 2$, il sistema non puó avere soluzione. Verifichiamo risolvendo il sistema dato

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla seconda equazione e sostituiamolo nella prima; si ha

$$\begin{cases} -(2 - 2y)/2 - y = 1 \\ x = 2 - 2y \end{cases}$$

la prima equazione si scrive $-1 + y - y = 1$, quindi $-1 = 1$ e ció é impossibile.

ES. 6 In entrambe le osservazioni si deve avere $E \cdot P = P_T$, dove

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é la matrice da trovare. Calcolando $E \cdot P = P_T$ si hanno quindi i due sistemi lineari, che devono essere entrambi soddisfatti

$$\begin{cases} 50a + 50b = 35 \\ 50c + 50d = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 60a + 200b = 140 \\ 60c + 200d = 54 \end{cases}$$

Cioé

$$\begin{cases} 50a + 50b = 35 \\ 60a + 200b = 140 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50c + 50d = 45 \\ 60c + 200d = 54 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione $a = 0$, $b = 7/10 = 0.70$, il secondo $c = 9/10 = 0.90$, $d = 0$. La matrice con gli elementi in forma decimale é quindi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0.70 \\ 0.90 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $P = (G, A)$, le componenti del vettore $E \cdot P$ sono $(G_T = 0.70A, A_T = 0.90G)$, quindi dopo un tempo T i giovani sono il 70% degli adulti A (il 70% degli adulti A ha generato nuovi giovani), mentre gli adulti sono il 90% dei giovani G (il 90% dei giovani é diventato adulto nel tempo T).