Formulario di Fisica II per Scienze Chimiche - A.A 2022/23

I. VETTORI

Dato un vettore $\vec{a}$ con componenti (a_x, a_y, a_z) in coordinate cartesiane, si definisce il modulo

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \equiv a$$

e il versore

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

I vettori si sommano e differenziano per componenti. Prodotto scalare e vettoriale:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = ab\sin\theta\,\hat{n}$$

con θ l'angolo compreso tra i due vettori. Il versore $\hat{n}$ si determina con la regola della mano destra.

II. ELETTROSTATICA

A. Forza di Coulomb e campo elettrico

• Forza di Coulomb esercitata da q_1 su q_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

con versore $\hat{r}$ che punta da q_1 a q_2; $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

• Forza subita da una carica in un campo elettrico:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

• Campo elettrico generato nel punto $\vec{r}$ da un sistema di cariche fisse puntiformi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

• Teorema di Gauss:

$$\iint_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \qquad (\Sigma \text{ superficie chiusa})$$

• Campo elettrico generato nel punto $\vec{r}$ da una distribuzione continua di carica $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV$$

La stessa formula vale per distribuzioni di carica di superficie o di linea, $\sigma(\vec{r})$ o $\lambda(\vec{r})$.

• Casi speciali:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r} \qquad \text{(filo carico)}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z} \qquad (\text{piano carico} \perp \hat{z})$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z} \qquad (\text{piano conduttore carico} \perp \hat{z})$$

B. Potenziale elettrico

• Relazione tra campo e potenziale:

$$V(\vec{r}) = -\int_P^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{ds}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

• Potenziale di un sistema di cariche puntiformi, con il punto P è convenzionalmente fissato all'infinito:

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

• Energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

con V_i il potenziale generato in $\vec{r}_i$ da tutte le cariche tranne Q_i.

C. Conduttori e condensatori

• Per un conduttore in equilibrio:

∘ $\vec{E} = 0$ all'interno.

∘ $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\,\hat{n}$ in prossimità della superficie.

∘ $V(\vec{r})$ è costante all'interno e in superficie.

• Condensatori:

$$Q = C(V_1 - V_2)$$

• Casi speciali:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{cond. piano di superficie } A)$$
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\,(R_2 - R_1)}{R_2 R_1} \quad (\text{cond. sferico di raggi } R_1 \text{ e } R_2)$$

Se riempiti da un materiale dielettrico, $\epsilon_0 \to \epsilon = \kappa\epsilon_0$.

• Capacità in serie e parallelo:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$
$$C_p = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

• Energia potenziale di un condensatore:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

D. Dipoli elettrici

• Potenziale di dipolo:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con $\vec{p} = q\vec{d}$.

• Energia potenziale, forza totale e momento meccanico di un dipolo in un campo elettrico esterno:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

III. CIRCUITI ELETTRICI

• Un generatore di tensione con f.e.m. $\mathcal{E}$ fornisce una differenza di potenziale

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2$$

tra il suo terminale positivo e quello negativo.

• Legge di Ohm:

$$Ri = V_1 - V_2$$

• Resistenza e resisitività di un conduttore di lunghezza L e sezione A:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

• Leggi di Kirchhoff:

$$\sum_n i_n = 0 \qquad \text{(nodi)}$$
$$\sum_n R_n i_n = \sum_n \mathcal{E}_n \qquad \text{(maglie)}$$

• Potenza dissipata in una resistenza (effetto Joule):

$$P = Ri^2 = \mathcal{E} i = \frac{\mathcal{E}}{R^2}$$

• Resistenze in serie e parallelo:

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

IV. MAGNETOSTATICA

A. Moto in un campo magnetico

• Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

• Raggio di curvatura in un campo uniforme:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La velocità angolare del moto è $\omega = qB/m$ (frequenza di ciclotrone).

B. Campi magnetici generati da correnti

• Legge di Ampère:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i$$

• Legge di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{ds} \times \hat{r}}{r^2}$$

• Casi speciali:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\hat{\theta} \qquad \text{(filo infinito)}$$
$$\vec{B} = \mu_0 n i\,\hat{z} \qquad \text{(solenoide infinito)}$$
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{z} \qquad \text{(spira, lungo l'asse)}$$

C. Forze magnetiche su circuiti

• Forza su un circuito percorso da corrente:

$$\vec{F} = i \oint_{\mathcal{C}} \vec{ds} \times \vec{B}$$

• Per un segmento rettilineo di lunghezza L in campo uniforme:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} = ilB\sin\theta\,\hat{n}$$

• Intensità della forza tra due tratti lunghi L appartenente a due fili rettilinei posti a distanza d:

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

È attrattiva se le correnti sono concordi, repulsiva altrimenti.

D. Momento magnetico

• Energia potenziale, forza totale e momento meccanico di un momento magnetico in un campo magnetico esterno:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$
$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

con $\vec{m} = iA\,\hat{n}$ per una spira di area A.

V. INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

• Legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

•; Legge di Lenz: la corrente indotta da $\mathcal{E}$ è tale da voler compensare il cambiamento del flusso.
• Auto-induzione

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$
$$\mathcal{E} = L\,\frac{di}{dt}$$

• Induzione mutua

$$\Phi_1(\vec{B}) = M_{12} i_2$$
$$M_{12} = M_{21}$$

• Energia di un induttore:

$$U = \frac{1}{2} L i^2$$

VI. EQUAZIONI DI MAXWELL

• Forma locale delle equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} t$$

• Forma integrale delle equazioni di Maxwell

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{(Teorema di Gauss)}$$
$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = 0$$
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$$
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_\Sigma(\vec{E})}{dt}$$

VII. ONDE ELETTROMAGNETICHE

• Equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial t^2} = 0\,.$$

dove U_α è una qualsiasi componente di $\vec{E}$ o $\vec{B}$ e l'onda si propaga lungo $\hat{x}$.
• Velocità della luce:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

• Proprietà delle onde elettromagnetiche:

∘ $\vec{E} \perp \vec{B}$.

∘ $\hat{E} \times \hat{B} = \hat{k}$, la direzione di propagazione.

∘ $E/B = c$.

∘ I campi oscillano in fase.

A. Onde armoniche

• Campo elettrico di un'onda piana monocromatica:

$$E = E_0\,\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

• Campo elettrico di un'onda sferica monocromatica:

$$E = \frac{V_0}{r}\,\cos(kr - \omega t)$$

• Definizioni:

∘ Vettore d'onda: $\vec{k}$

∘ Lunghezza d'onda: $\lambda = 2\pi/k$

∘ Frequenza angolare: $\omega = ck$

∘ Periodo: $T = 2\pi/\omega$

∘ Frequenza: $\nu = \omega/2\pi$

B. Energia del campo elettromagnetico

• Densità di energia:

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \equiv \epsilon_0 E^2$$

• Vettore di Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B}$$

• Intensità di un onda piana monocromatica:

$$I = c\epsilon_0 E_0^2$$

VIII. OTTICA

A. Riflessione e rifrazione

• In un mezzo con indice di rifrazione n:

$$v = \frac{c}{n}$$
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

• Legge di Snell:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Gli angoli di incidenza sono definiti rispetto alla normale.

B. Interferenza

• Differenza di fase tra due onde sferiche in un punto P a distanza r_1, r_2 dalle sorgenti:

$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

• Intensità della somma di due onde coerenti:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta\,.$$

• Frange di interferenza nell'esperimento di Young:

$$I(\delta) = 4I_0\,\cos^2(\delta)$$
$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

• Posizione dei massimi (interferenza costruttiva):

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}\,,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

C. Diffrazione

• Frange di diffrazione da una fenditura di apertura a:

$$I(\delta) = I_0\,\frac{\sin^2(\delta)}{\delta^2}$$
$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

• Posizione dei minimi di diffrazione:

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}\,,\ n = \pm1, \pm2, \ldots$$

• Criterio di Rayleigh (potere risolutivo di una lente, ovvero angolo sotteso dal disco di Airy di un'apertura circolare di raggio R):

$$\theta \approx 0.61\,\frac{\lambda}{R}$$

D. Reticolo di diffrazione

• Frange di interferenza da un reticolo di diffrazione:

$$I(\delta) = I_0\,\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$
$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

• Posizione dei massimi primari:

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}\,,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

• Potere risolutivo del reticolo:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN}$$

Nota: Dato uno schermo ad una distanza L molto maggiore di d, a, si può approssimare $\sin\theta \approx x/L$ in tutte le formule relativa a diffrazione ed interferenza.

IX. UNITÀ DI MISURA

Carica	C	Coulomb
Potenziale, f.e.m.	V	Volt
Campo elettrico	V/m	Volt/metro
Energia potenziale	J, eV	Joule, elettronvolt
Capacità	F	Farad
Corrente elettrica	A	Ampère
Resistenza	Ω	Ohm
Campo magnetico	T	Tesla
Flusso magnetico	Wb=T/m^2	Weber
Induttanza	H	Henry
Intensità, vet. di Poynting	W/m^2	Watt/metro^2
Frequenza (ν)	Hz=s^{-1}	Hertz
Frequenza angolare (ω)	rad/s	radianti/sec

Conversione tra Joule ed elettronvolt:

$$1\,\text{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\text{J}$$

X. COSTANTI FONDAMENTALI

$$c = 2.998\times10^{8}\ \text{m/s}$$
$$e = 1.602\times10^{-19}\ \text{C}$$
$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A}\ \ [\text{o H/m}]$$
$$\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\text{N}^{-1}\cdot\text{C}^2\cdot\text{m}^{-2}$$
$$m_e = 9.11\times10^{-31}\,\text{kg}$$
$$m_p = 1.673\times10^{-27}\,\text{kg} \approx 1836\times m_e$$