

Formulario di Fisica II per Scienze Chimiche - A.A 2022/23

I. Vettori

Dato un vettore \vec{a} con componenti (a_x, a_y, a_z) in coordinate cartesiane, si definisce il modulo

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \equiv a$$

e il versore

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

I vettori si sommano e differenziano per componenti. Prodotto scalare e vettoriale:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta \\ \vec{a} \times \vec{b} &= ab \sin \theta \hat{n}\end{aligned}$$

con θ l'angolo compreso tra i due vettori. Il versore \hat{n} si determina con la regola della mano destra.

II. Elettrostatica

A. Forza di Coulomb e campo elettrico

- Forza di Coulomb esercitata da q_1 su q_2 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

con versore \hat{r} che punta da q_1 a q_2 ; $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

- Forza subita da una carica in un campo elettrico:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- Campo elettrico generato nel punto \vec{r} da un sistema di cariche fisse puntiformi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

- Teorema di Gauss:

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \quad (\Sigma \text{ superficie chiusa})$$

- Campo elettrico generato nel punto \vec{r} da una distribuzione continua di carica $\rho(\vec{r}')$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

La stessa formula vale per distribuzioni di carica di superficie o di linea, $\sigma(\vec{r}')$ o $\lambda(\vec{r}')$.

- Casi speciali:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r} \quad (\text{filo carico})$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} \quad (\text{piano carico} \perp \hat{z})$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} \quad (\text{piano conduttore carico} \perp \hat{z})$$

B. Potenziale elettrico

- Relazione tra campo e potenziale:

$$\begin{aligned}V(\vec{r}) &= - \int_P^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}V\end{aligned}$$

- Potenziale di un sistema di cariche puntiformi, con il punto P convenzionalmente fissato all'infinito:

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

- Energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

con V_i il potenziale generato in \vec{r}_i da tutte le cariche tranne q_i .

C. Conduttori e condensatori

- Per un conduttore in equilibrio:

- $\vec{E} = 0$ all'interno.
- $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{n}$ in prossimità della superficie.
- $V(\vec{r})$ è costante all'interno e in superficie.

- Condensatori:

$$Q = C(V_1 - V_2)$$

- Casi speciali:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{cond. piano di superficie } A)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (\text{cond. sferico di raggi } R_1 \text{ e } R_2)$$

Se riempiti da un materiale dielettrico, $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \kappa\epsilon_0$.

- Capacità in serie e parallelo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_s} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \\ C_p &= C_1 + C_2 + \dots + C_n\end{aligned}$$

- Energia potenziale di un condensatore:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

D. Dipoli elettrici

- Potenziale di dipolo:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con $\vec{p} = q\vec{d}$.

- Energia potenziale, forza totale e momento meccanico di un dipolo in un campo elettrico esterno:

$$\begin{aligned} U &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \\ \vec{F} &= -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ \vec{M} &= \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned}$$

III. Circuiti elettrici

- Un generatore di tensione con f.e.m. \mathcal{E} fornisce una differenza di potenziale

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2$$

tra il suo terminale positivo e quello negativo.

- Legge di Ohm:

$$Ri = V_1 - V_2$$

- Resistenza e resistività di un conduttore di lunghezza L e sezione A :

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

- Leggi di Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \sum_n i_n &= 0 && \text{(nodi)} \\ \sum_n R_n i_n &= \sum_n \mathcal{E}_n && \text{(maglie)} \end{aligned}$$

- Potenza dissipata in una resistenza (effetto Joule):

$$P = Ri^2 = \mathcal{E}i = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

- Resistenze in serie e parallelo:

$$\begin{aligned} R_s &= R_1 + R_2 + \dots + R_n \\ \frac{1}{R_p} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \end{aligned}$$

IV. Magnetostatica

A. Moto in un campo magnetico

- Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Raggio di curvatura in un campo uniforme:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La velocità angolare del moto è $\omega = qB/m$ (frequenza di ciclotrone).

B. Campi magnetici generati da correnti

- Legge di Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

- Legge di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Casi speciali:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\theta} \quad \text{(filo infinito)}$$

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{z} \quad \text{(solenoido infinito)}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{(spira, lungo l'asse)}$$

Nota: Le ultime due formule valgono se i scorre in senso anti-orario con \hat{z} uscente dal foglio.

C. Forze magnetiche su circuiti

- Forza su un circuito percorso da corrente:

$$\vec{F} = i \oint_C d\vec{s} \times \vec{B}$$

- Per un segmento di lunghezza L in campo uniforme:

$$\vec{F} = iL \hat{d}s \times \vec{B} = iLB \sin \theta \hat{n}$$

- Intensità della forza tra due fili rettilinei di lunghezza L posti a distanza d :

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

È attrattiva se le correnti sono concordi, repulsiva altrimenti.

D. Momento magnetico

- Energia potenziale, forza totale e momento meccanico di un momento magnetico in un campo magnetico esterno:

$$\begin{aligned} U &= -\vec{m} \cdot \vec{B} \\ \vec{F} &= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \\ \vec{M} &= \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned}$$

con $\vec{m} = iA \hat{n}$ per una spira di area A .

V. Induzione elettromagnetica

- Legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

- Legge di Lenz: la corrente indotta da \mathcal{E} è tale da voler compensare il cambiamento del flusso.

- Auto-induzione

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{B}) &= Li \\ \mathcal{E} &= L \frac{di}{dt}\end{aligned}$$

- Induzione mutua

$$\begin{aligned}\Phi_1(\vec{B}) &= M_{12}i_2 \\ M_{12} &= M_{21}\end{aligned}$$

- Energia di un induttore:

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

VI. Equazioni di Maxwell

- Forma locale delle equazioni di Maxwell

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Forma integrale delle equazioni di Maxwell

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{dt}$$

VII. Onde Elettromagnetiche

- Equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 U_{\alpha}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_{\alpha}}{\partial t^2} = 0.$$

dove U_{α} è una qualsiasi componente di \vec{E} o \vec{B} e l'onda si propaga lungo \hat{x} .

- Velocità della luce:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- Proprietà delle onde elettromagnetiche:

$$\circ \vec{E} \perp \vec{B}.$$

$$\circ \hat{E} \times \hat{B} = \hat{k}, \text{ la direzione di propagazione.}$$

$$\circ E/B = c.$$

- I campi oscillano in fase.

A. Onde armoniche

- Campo elettrico di un'onda piana monocromatica:

$$E = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

- Campo elettrico di un'onda sferica monocromatica:

$$E = \frac{V_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

- Definizioni:

$$\circ \text{Vettore d'onda: } \vec{k}$$

$$\circ \text{Lunghezza d'onda: } \lambda = 2\pi/k$$

$$\circ \text{Frequenza angolare: } \omega = ck$$

$$\circ \text{Periodo: } T = 2\pi/\omega$$

$$\circ \text{Frequenza: } \nu = \omega/2\pi$$

B. Energia del campo elettromagnetico

- Densità di energia:

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \equiv \epsilon_0 E^2$$

- Vettore di Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

- Intensità di un onda piana monocromatica:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

VIII. Ottica

A. Riflessione e rifrazione

- In un mezzo con indice di rifrazione n :

$$v = \frac{c}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

- Legge di Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Gli angoli di incidenza sono definiti rispetto alla normale.

B. Interferenza

- Differenza di fase tra due onde sferiche in un punto P a distanza r_1, r_2 dalle sorgenti:

$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

- Intensità della somma di due onde coerenti:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta.$$

- Frange di interferenza nell'esperimento di Young:

$$I(\delta) = 4I_0 \cos^2(\delta/2) \quad \text{con} \quad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

- Posizione dei massimi (interferenza costruttiva):

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

C. Diffrazione

- Frange di diffrazione da una fenditura di apertura a :

$$I(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \quad \text{con} \quad \delta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

- Posizione dei minimi di diffrazione:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Criterio di Rayleigh (angolo sotteso dal disco di Airy di un'apertura circolare di raggio R):

$$\theta \approx 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

D. Reticolo di diffrazione

- Frange di interferenza da un reticolo di diffrazione:

$$I(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad \text{con} \quad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

- Posizione dei massimi primari:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Potere risolutivo del reticolo:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN}$$

Nota: Tutte le formule relative a diffrazione ed interferenza valgono per uno schermo ad una distanza L molto maggiore di d, a . Si può anche scrivere $\sin \theta \approx x/L$ con x la coordinata lungo lo schermo.

IX. Unità di misura

Carica	C	Coulomb
Potenziale, f.e.m.	V	Volt
Campo elettrico	V/m	Volt/metro
Energia potenziale	J, eV	Joule, elettronvolt
Capacità	F	Farad
Corrente elettrica	A	Ampère
Resistenza	Ω	Ohm
Campo magnetico	T	Tesla
Flusso magnetico	Wb=T/m ²	Weber
Induttanza	H	Henry
Intensità, vet. di Poynting	W/m ²	Watt/metro ²
Frequenza (ν)	Hz=s ⁻¹	Hertz
Frequenza angolare (ω)	rad/s	radianti/sec

A. Relazioni tra unità di misura

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} = 1 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^2$$

$$1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-2}$$

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

X. Costanti fondamentali

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad [\text{o H/m o N/A}^2]$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \cdot \text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 1836 \times m_e$$

$$g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$