Diagonalizzazione del tensore d'inerzia

Una matrice simmetrica di rango 2 è sempre diagonalizzabile.

E' sempre possibile individuare una rotazione del sistema di coordinate che rende la matrice diagonale nel sistema ruotato.

Siano $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{w}$ i tre versori del sistema ruotato e P_u, P_v e P_w e ω_u, ω_v e ω_w le componenti di $\vec{P}$ e $\vec{\omega}$ in questo sistema.

La relazione tra $\vec{P}$ e $\vec{\omega}$ diventa:

$$\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{iu}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum m_i d_{iv}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum m_i d_{iw}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix}$$

Per qualunque rotazione intorno ad uno di questi assi (tutti passanti per il c.d.m.), per esempio $\vec{\omega} \equiv (\omega_u, 0, 0)$, il momento angolare è orientato come l'asse, che è quindi un asse centrale d'inerzia.

Per una $\vec{\omega}$ qualunque invece si ha $\vec{P}_C \equiv (I_u \omega_u, I_v \omega_v, I_w \omega_w)$

(NB in questo caso $\vec{P}$ non è parallelo ad $\vec{\omega}$)

Assi centrali d'inerzia

Abbiamo visto che qualunque corpo rigido ammette sempre (almeno) tre assi centrali d'inerzia, passanti per il c.d.m.

Se si adottano i tre assi centrali come riferimento cartesiano solidale col baricentro, per una rotazione rispetto ad un asse arbitrario, la relazione tra momento e velocità angolare, poiché il tensore d'inerzia è diagonale in questo riferimento, è:

$$\vec{P}_C \equiv (I_u\omega_u, I_v\omega_v, I_w\omega_w)$$

NB: P non è parallelo ad $\vec{\omega}$

Per qualunque rotazione intorno ad un asse centrale d'inerzia, il momento angolare è orientato come l'asse, ed è quindi parallelo alla velocità angolare.

Non è necessario un momento esterno per mantenere lo stato di rotazione. Se il sistema è isolato, può mantenere indefinitamente questo stato di rotazione.

Possiamo utilizzare questo riferimento "naturale" del corpo rigido in presenza di momenti esterni per studiarne la dinamica con la seconda equazione cardinale?