Soluzioni

Esercizio 1

Dati: M= 1kg, m=250 g, R=15cm, h=30 cm;

Non ci sono forze esterne lungo l'asse orizzontale (asse del piano) per cui si conserva la quantità di moto del sistema lungo tale asse. La coordinata x_c del centro di massa rimane ferma durante il moto.

1. La differenza di posizione tra lo stato iniziale e finale si può calcolare utilizzando il formalismo del due corpi: $x_M^{i(f)} = \mu/M x_{rel}^{i(f)}$, $x_m^{i(f)} = -\mu/m x_{rel}^{i(f)}$ con $x_{rel}^{i(f)} = x_M^{i(f)} - x_m^{i(f)}$ e $x_{rel}^f - x_{rel}^i = 2R$.
   Da cui $x_M^f - x_M^i = 2mR/(m+M) = 6\ cm$ e $x_m^f - x_m^i = -2MR/(m+M) = -24\ cm$.

2. Dalla conservazione della quantità di moto lungo l'asse delle x si ha $mv_m^x + Mv_M^x = 0 \rightarrow v_M^x = -m/Mv_m^x$.

   Quando la massa m raggiunge il bordo sinistro la sua velocità orizzontale rispetto alla guida è nulla: $v_M^x = v_m^x$. Quindi $v_m^x = v_M^x = 0$.

   La guida è ferma e la velocità di m è diretta verticalmente.

   Il lavoro delle reazioni vincolari è nullo perchè perpendicolare allo spostamento relativo della massa rispetto alla guida, si conserva quindi anche l'energia meccanica. Per la conservazione dell'energia la massa raggiunge la quota iniziale di partenza.

3. Nel punto più basso della guida è $v_M = -m/Mv_m$ poiché le velocità sono orizzontali. Dalla conservazione di E e di Q discende

   $mgh = 1/2mv_m^2 + 1/2Mv_M^2$
   $mgh = 1/2m(1+m/M)v_m^2$
   $v_m = \sqrt{2ghM/(m+M)}$

4. Il lavoro fatto dalla reazione vincolare si ricava dal teorema delle forze vive (la forza peso e la reazione del piano sul cuneo non compiono lavoro.)

   $L_M = 1/2MV_M^2 = 1/2m^2/Mv_m^2 = m^2gh/(m+M)$

5. In presenza di una forza esterna orizzontale F si ha $F = (m+M)a_{cm}^x$ con $a_{cm}^x = m/(m+M)a_m^x$ poiché la guida è ferma. Quindi $F = ma_m^x = Nsin(\theta)$.

La conservazione dell'energia in un punto generico individuato da un angolo θ rispetto alla verticale e l'equazione del moto nella direzione radiale danno

$mgR = mgR(1 - cos(\theta)) + 1/2mv_m^2$
$mv_m^2/R = -mgcos(\theta) + N$
$N = 3mgcos(\theta)$

La forza orizzontale che la guida esercita su m
$F_x = Nsin(\theta) = 3mgcos(\theta)sin(\theta) = 3/2mgsin(2\theta)$
che è massimo in modulo per $\theta = \pm\pi/4$ e F=3/2 mg.