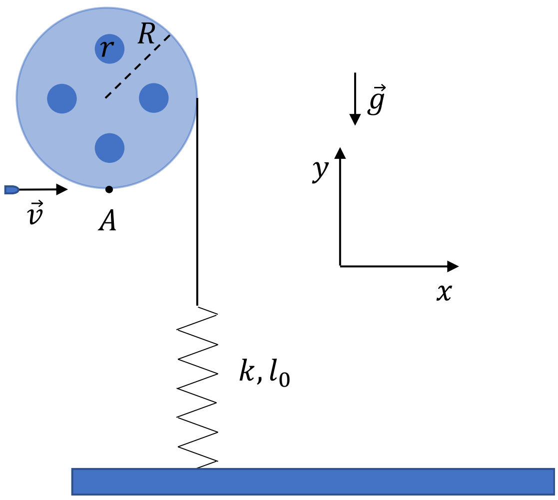
Quarto esonero corso di Meccanica per Fisici 2021

Esercizio 1

Un disco è disposto in verticale, ed è vincolato a ruotare intorno ad un perno passante per il suo centro, con attrito trascurabile. Al disco, di massa M, sono attaccati 4 dischi più piccoli di raggio r e massa m, disposti come in figura, i cui centri sono a distanza $R/2$ dal centro. Sulla circonferenza esterna del disco si può arrotolare un filo collegato ad una molla di massa trascurabile, costante elastica k, e lunghezza a riposo l_0.



1. Determinare il momento di inerzia del sistema composto dal disco e dai 4 dischi più piccoli rispetto ad un asse orizzontale passante per il perno di rotazione (formula e valore numerico).

Si consideri ora che all'istante $t = 0$, un proiettile di massa m_p con velocità v (considerato puntiforme) colpisce il disco con un urto completamente anelastico, rimanendo quindi conficcato nel disco nel punto A secondo quanto disegnato in figura. In $t = 0$, il disco è fermo e la molla è alla lunghezza di riposo. Si consideri che la molla resta sempre diretta lungo l'asse y. Determinare:

2. La velocità angolare ω del sistema immediatamente dopo l'urto se $v = 10$ m/s (formula e valore numerico).

3. Il valore v della velocità che deve invece avere il proiettile in modo che, dopo essersi conficcato nel disco, il proiettile possa arrivare con velocità nulla nel punto di massima quota (formula).

Si consideri ora il caso in cui la velocità v iniziale del proiettile comporta uno spostamento piccolo dopo l'urto rispetto alla condizione di partenza.

4. Determinare in questa condizione il periodo delle piccole oscillazioni del sistema (formula).

Dati: $M = 1.0$ kg, $m = 0.5$ kg, $R = 0.2$ m, $r = 0.05$ m, $m_p = 20$ g.

Soluzione

1. Il momento di inerzia del disco I_0 si ottiene da un disco pieno, a cui si somma il momento di inerzia dei 4 dischi aggiuntivi. Quindi:

$$I_0 = I_{\text{disco}} + I_{\text{4dischi}} \tag{1}$$

Quello del disco:

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{2}$$

Per i 4 dischi, di raggio r, posti a distanza $R/2$:

$$I_{\text{fori}} = 4\left[\frac{1}{2}mr^2 + m\frac{R^2}{4}\right] \tag{3}$$

Quindi:

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr^2 + mR^2 = 0.0425 \text{ kg m}^2 \tag{4}$$

2. Si conserva il momento angolare durante l'urto, ma non l'energia cinetica. Prima dell'urto il momento angolare vale:

$$P_i = m_p v R \tag{5}$$

Dopo l'urto il sistema disco-proiettile gira con velocità angolare ω:

$$P_f = I'\omega \tag{6}$$

dove I' è il nuovo momento di inerzia che comprende l'aggiunta del proiettile:

$$I' = I_0 + m_p R^2 = 0.0433 \text{ kg m}^2 \tag{7}$$

Imponendo la conservazione del momento angolare:

$$I'\omega = m_p v R \rightarrow \omega = \frac{m_p v R}{I'} = 0.924 \text{ rad/s} \tag{8}$$

3. Per determinare la velocità v del proiettile necessaria perché arrivi al punto di massima quota con velocità nulla, dobbiamo imporre la conservazione dell'energia. In particolare la condizione finale si ottiene con la molla allungata di un tratto $\Delta x = R\pi$ (rotazione di π del disco), il proiettile fermo, con variazione di energia potenziale pari a quella del proiettile che cambia quota di $2R$. Quindi:

$$\frac{1}{2}I'\omega^2 = m_p g 2R + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \tag{9}$$

Sostituendo $\Delta x = R\pi$ e l'espressione di ω trovata in (8):

$$\frac{1}{2}\frac{(m_p v R)^2}{I'} = m_p g 2R + \frac{1}{2}k(\pi R)^2 \tag{10}$$

Si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{I'}{m_p}\left(\frac{4g}{R} + \frac{k\pi^2}{m_p}\right)} \tag{11}$$

4. Per il periodo delle piccole oscillazioni consideriamo l'equazione cardinale per θ (angolo di rotazione rispetto alla condizione iniziale, con proiettile a quota minima). Sul sistema agisce il momento delle forze dovuto alla forza di richiamo della molla, ed il momento della forza peso del proiettile (non nullo per $\theta > 0$). Proiettando lungo l'asse z:

$$I'\frac{d^2\theta}{dt^2} = -kR\Delta x - m_p g R \sin\theta \tag{12}$$

Poichè $\Delta x = R\theta$, ed imponendo le piccole oscillazioni ($\sin\theta \sim \theta$):

$$I'\frac{d^2\theta}{dt^2} = -kR^2\theta - m_p g R\theta = -(kR + m_p g)R\theta \tag{13}$$

Otteniamo un oscillatore per θ con pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{(kR + m_p g)R}{I'}} \tag{14}$$

e periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{(kR + m_p g)R}} \tag{15}$$