Foglio 12 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

24 dicembre 2015

12.1 Esercizio

Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$
$$\mathbf{F}(x,y) = (a\sin x + b\,y\cos(xy), c\cos y + d\,x\cos(xy))$$

sono irrotazionali in tutto il piano e determinarne un potenziale.

12.2 Esercizio

Sia $\mathbf{F}(x,y) = (5x+3y-1, 3x+5y+2)$.
i. Calcolare, se esiste, un potenziale per $\mathbf{F}$.
ii. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva Γ, dove Γ è la parte di circonferenza di centro $(0,0)$ contenuta nel primo quadrante, orientata da $(1,0)$ a $(0,1)$.
iii. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il segmento orientato che congiunge i punti $(0,1)$ e $(1,0)$.

12.3 Esercizio

Sia $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$.
i. Calcolare il lavoro della forza $\mathbf{F}(x,y,z)$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1,1,1)$,
ii. Determinare, se esiste, un potenziale del campo $\mathbf{F}$.

12.4 Esercizio

Determinare se sono conservativi nei loro domini i seguenti campi, e nei casi in cui la risposta è affermativa calcolare i rispettivi potenziali:

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x^2, 3y^2), \quad \mathbf{F}(x,y) = (e^x + y,\ e^y + x),$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2,\ x^2,\ x^2+y^2+z^2),$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

12.5 Esercizio

Determinare se il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

è conservativo nei semipiani

$$x>0, \quad y>0, \quad x<0, \quad y<0$$

e, nei casi in cui la risposta è affermativa, calcolare i rispettivi potenziali.

12.6 Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x+5}{((x+5)^2+y^2)^2} + x,\ \frac{y}{((x+5)^2+y^2)^2} + y\right)$$

i. riconoscere che $\mathbf{F}$ è conservativo e trovarne un potenziale;
ii. calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 10.

12.7 Esercizio

Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2xy}{y-\alpha}, 2 - \frac{4x^2}{(y-\alpha)^2}\right)$$

è conservativo nel suo dominio, e, per tale valore di α, calcolarne il lavoro compiuto lungo la curva di equazione polare

$$\rho = \frac{\theta}{\pi}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

12.8 Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(\frac{2y^2 - x^2}{(x^2+2y^2)^2}\,,\ -\frac{4xy}{(x^2+2y^2)^2}\Big),$$

1. dimostrare a priori che è conservativo nel suo dominio, senza calcolarne i potenziali;
2. calcolarne i potenziali.

12.9 Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(-\frac{\alpha x + y^2}{(x-2)^2\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{y}{(x-2)\sqrt{x^2+y^2}}\Big),$$

dire per quali α è conservativo nel semipiano $x > 2$, e in tal caso trovarne il potenziale che si annulla nel punto $(3,0)$. Il campo è conservativo nel suo dominio?

Integrali multipli

12.10 Esercizio

Disegnare e calcolare il volume delle seguenti regioni di $\mathbb{R}^3$

$$E = \{x^2+y^2 \le \lambda z,\ 0 \le z \le h\}$$
$$E = \{0 \le x, y \le 1,\ 0 \le z \le (1+x^2+y^2)\}$$
$$E = \{x^2+y^2 \le R^2,\ x^2+z^2 \le R\}$$
$$E = \left\{0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le \left[\frac{r-R}{H}z + R\right]^2\right\}$$

dove vale $\lambda, h > 0$ e $R > r > 0$.

12.11 Esercizio

Calcolare l'integrale

$$\int_D x^2\,dxdy$$

dove $D = \{0 < y + 2x < 1,\ x^2 < y < x^2+1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

12.12 Esercizio

Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $D = \{x > 0,\ 1 < x^2+y^2 < 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

12.13 Esercizio

Disegnare la curva piana γ di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = \theta^2\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

poi calcolare l'area della regione di piano racchiusa da γ e dal semiasse positivo delle x, e infine la lunghezza di γ.

12.14 Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x e^{|y-2x|}\,dx\,dy\,,$$

dove D è il trapezio delimitato dalle rette $x = 0$, $x = 2$, $y = x$, $y = 6$.

12.15 Esercizio

Dati i due insiemi

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 4\,,\ x \ge 0\big\}\,,$$

$$C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2-2y \le 0\big\}\,,$$

calcolare le coordinate del baricentro di $E \cup C$.

12.16 Esercizio

Data la curva piana γ di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 2\cos^2\theta\,, \qquad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]\,,$$

calcolare l'area della regione di piano racchiusa da γ e la lunghezza di γ.

12.17 Esercizio

Calcolare

$$\iint_E y\cos^2(y-x)\,dx\,dy,$$

dove

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le\frac{\pi}{2},\quad |y-x|\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

12.18 Esercizio

Dato l'insieme

$$E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\ge 1\,,\ 0\le y\le x\le 1+\frac{y}{2}\right\},$$

calcolare

$$\iint_E \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

12.19 Esercizio

Disegnare l'insieme D tale che

$$\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\left(\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\right),$$

e calcolare questo integrale invertendo l'ordine di integrazione.

12.20 Esercizio

Calcolare $\iint_E x^2\,dx$, dove E è la regione limitata del piano compresa tra le curve di equazione

$$y=\frac{1}{3+x^2}\quad \text{e}\quad y=\frac{x^2}{4}.$$

12.21 Esercizio

Calcolare il baricentro della regione piana

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 4y\,,\ x^2+y^2\ge 8\right\}.$$

12.22 Esercizio

Si considerino il cerchio C di centro $(0,2)$ e raggio 2, e una semiretta r, avente per vertice l'origine, contenuta nel primo quadrante del sistema cartesiano. Detto α l'angolo che r forma con il semiasse positivo delle x, trovare (in funzione di α) la posizione del baricentro della parte di C che si trova al di sotto di r.

12.23 Esercizio

Con un *opportuno* cambio di variabile, calcolare

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y}\sin(xy)\,dx\,dy\ ,$$

dove

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2\le y\le 2x^2,\ \frac{\pi}{2x}\le y\le\frac{\pi}{x}\right\}.$$

12.24 Esercizio

Disegnare l'insieme

$$D=\left\{(x,y)\ :\ 0\le y\le\pi\,,\ \operatorname{sen} y\le x\le e^y\right\},$$

scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

qualunque sia $f(x,y)$ continua in D, e invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

12.25 Esercizio

Disegnare ciascuno degli insiemi D indicati sotto e scrivere una formula per il calcolo di

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

qualunque sia $f(x,y)$ continua in D.

1. $D=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 4\,,\ x\le -1+\frac{|y|}{2}\right\},$
2. $D=\left\{(x,y)\ :\ y\ge 0\,,\ x^2+y^2\ge 1\,,\ x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\right\},$

3. $D = \left\{(x, y) \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \geq 1\,,\ x + y \leq 2\right\},$

4. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ y \leq x^2\right\},$

5. $D = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq \cos y\,,\ 0 \leq y \leq \cos x\right\},$