ESERCIZIO

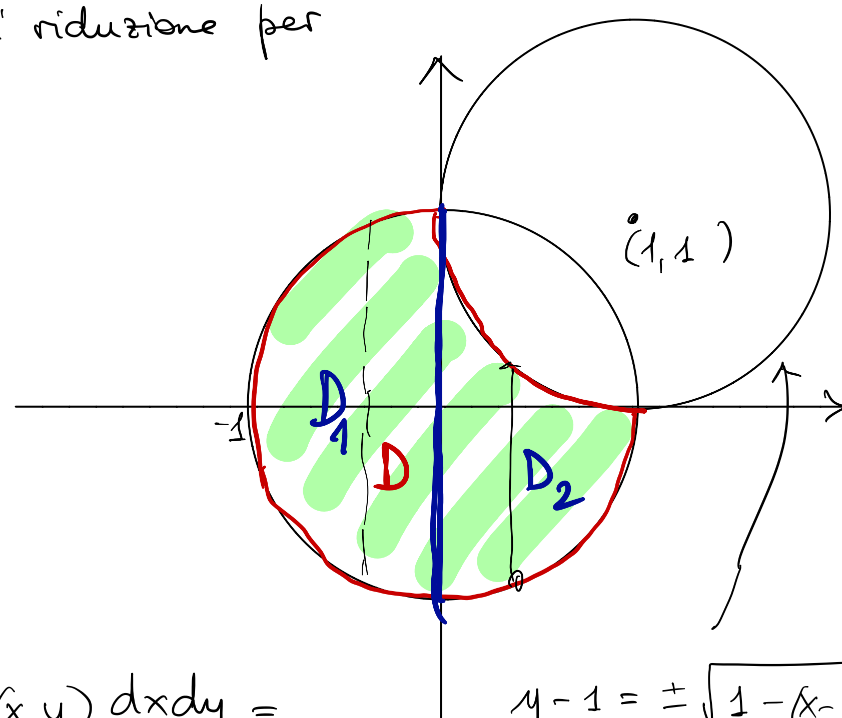
Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1, \ (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1\}$$

e scrivere una formula di riduzione per

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$\forall$ funzione continua $f(x,y)$.



$$y-1 = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

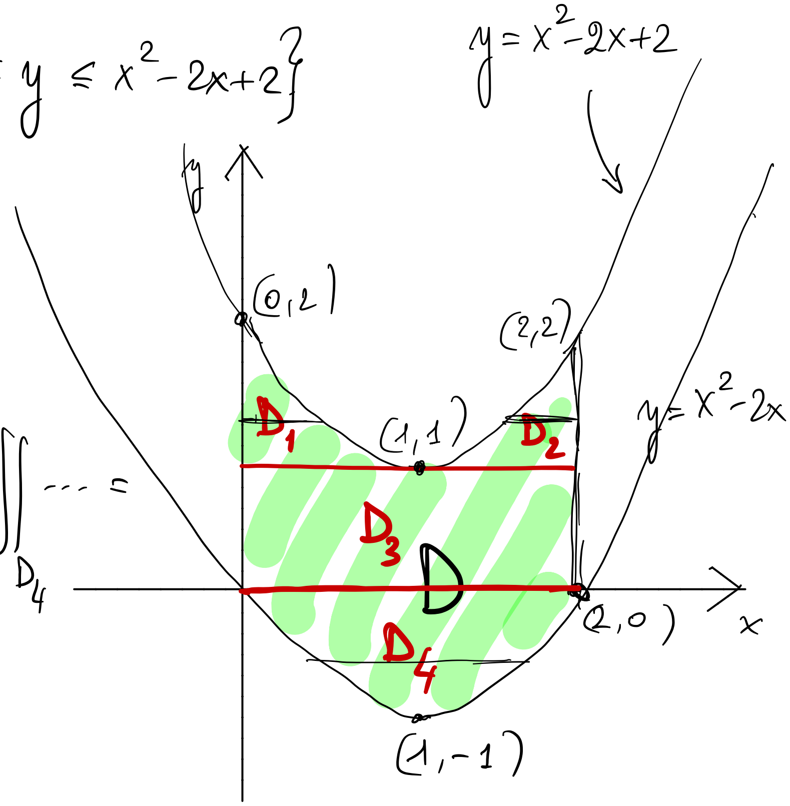
$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \ f(x,y) + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} dy \ f(x,y)$$

ESERCIZIO Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x^2-2x+2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

per ogni $f(x,y)$ continua, e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ x^2-2x \le y \le x^2-2x+2\}$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} \ldots + \iint_{D_3} \ldots + \iint_{D_4} \ldots =$$

$$= (*)$$

$$y = x^2-2x+2 \iff x^2-2x+2-y=0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-2+y} = 1 \pm \sqrt{y-1}$$

$$y = x^2-2x \iff x^2-2x-y=0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1+y}$$

$$(*) = \int_1^2 dy \int_0^{1-\sqrt{y-1}} dx\, f(x,y) + \int_1^2 dy \int_{1+\sqrt{y-1}}^2 dx\, f(x,y) + \int_0^1 dy \int_0^2 dx\, f(x,y) +$$

$$+ \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}} dx\, f(x,y)$$

CAMBIAMENTO DI VARIABILI PER INTEGRALI DOPPI

Idea: generalizzare a due variabili la formula di integrazione per sostituzione ben nota in 1 variabile

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int_a^b f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

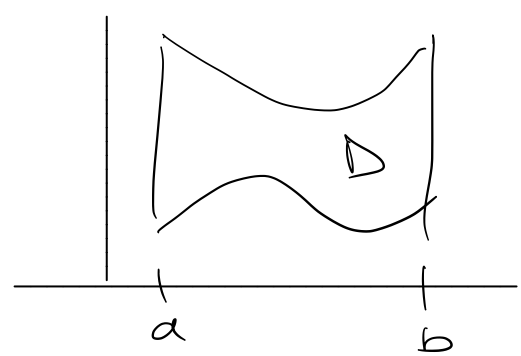
f continua nell'intervallo di estremi $g(a), g(b)$
$g \in C^1([a,b])$

DEF. Dominio normale regolare è un insieme della forma

$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ dove

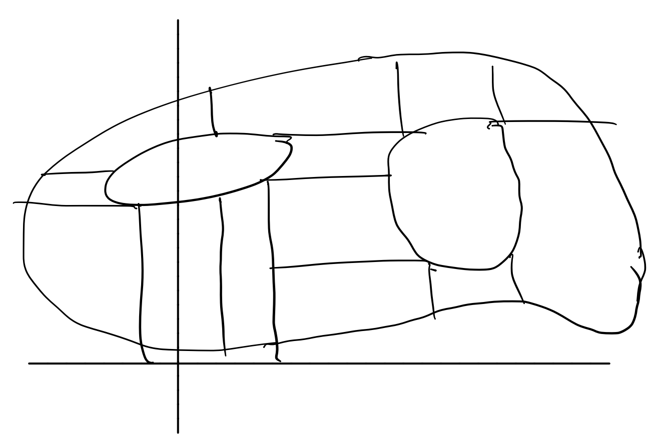
$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1 e t.c.
$\alpha(x) < \beta(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

(oppure con x e y scambiate)



Dominio regolare = un insieme che sia unione di un numero finito di domini normali regolari

In pratica, un dominio regolare è un insieme delimitato da un numero finito di curve regolari



TEOREMA (cambiamento di variabili negli integrali doppi).

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^2$, e sia $\phi : T \to D$ una funzione tale che

1) ϕ biettiva
2) $\phi \in C^1(T; D)$
3) lo jacobiano di ϕ è sempre $\neq 0$.

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in T.$$

$$\phi : T \longrightarrow D$$
$$(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

ϕ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra T e D.

OSS se ϕ è un diffeomorfismo ϕ^{-1} è un diffeomorfismo (segue dal teorema di invertib. locale).

Allora, $\forall$ funzione $f(x,y)$ continua in D si ha:

$$\iint_{\substack{D \\ = \\ \Phi(T)}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T \underbrace{f(\phi(u,v))}_{= f(x(u,v),\, y(u,v))} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| du\,dv$$

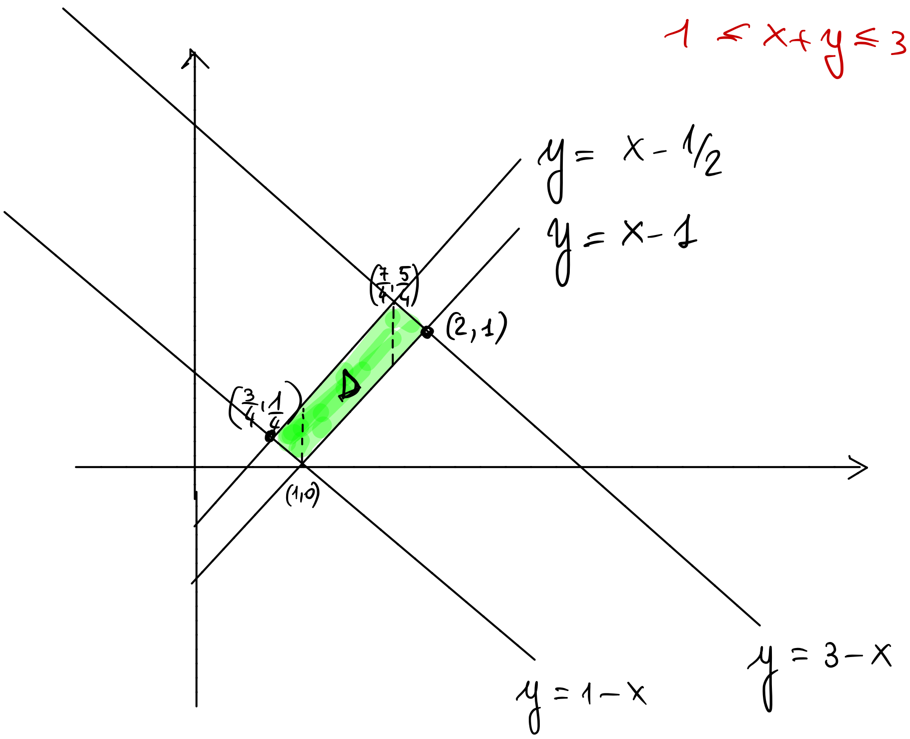
La scelta di una trasformazione corretta dipende:

1) dalla funzione f
2) dal dominio D che vogliamo rendere più semplice.

ESEMPIO Calcolare $\displaystyle\iint_D (x+y)\log(x-y)\,dx\,dy$

dove $D = \{(x,y) : 1-x \le y \le 3-x,\ x-1 \le y \le x-\frac{1}{2}\}$.

$1 \le x+y \le 3$ $\frac{1}{2} \le x-y \le 1$



Nelle coordinate originali sarebbe

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{3/4}^{1} dx \int_{1-x}^{x-1/2} dy\, f(x,y) + \int_{1}^{7/4} dx \int_{x-1}^{x-1/2} dy\, f(x,y) + \int_{7/4}^{2} dx \int_{x-1}^{3-x} dy\, f(x,y)$$

complicato!

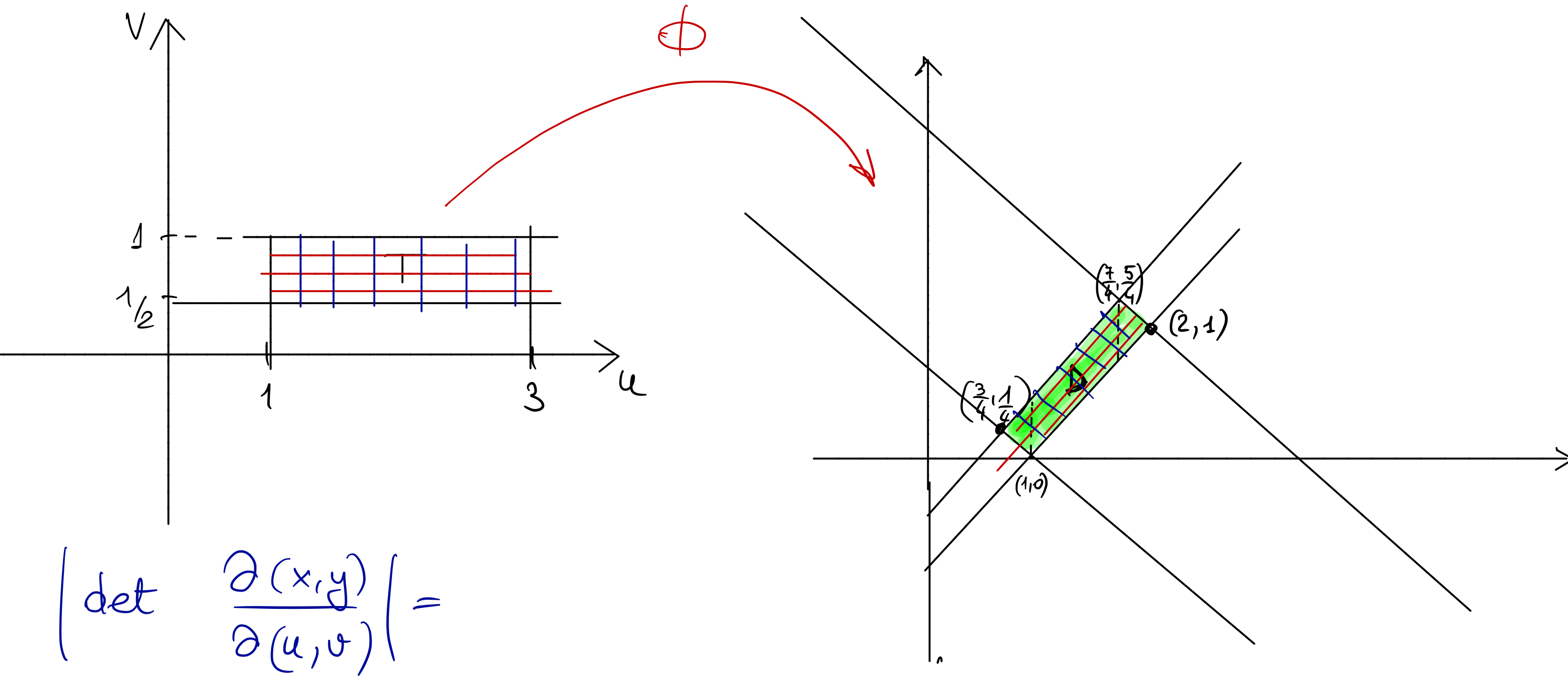
L'esercizio suggerisce la trasformazione

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \iff \left.\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} = x(u,v) \\ y = \dfrac{u-v}{2} = y(u,v) \end{cases}\right\} \Phi(u,v).$$

biettiva da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

$$\Phi : T \longrightarrow \Phi(T) = D \text{ assegnato}$$

dove $T = \{(u,v) : 1 \le u \le 3,\ \frac{1}{2} \le v \le 1\}$



$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| =$$

$$= \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} = \end{cases}$$

La formula diventa

$$\iint_D (x+y)\log(x-y)\,dx\,dy = \iint_T u \log v \,\frac{1}{2}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 du \int_{1/2}^1 dv\, u \log v = \frac{1}{2}\left.\frac{u^2}{2}\right|_1^3 \Big(v(\log v - 1)\Big)\Big|_{1/2}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1 - \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2} - 1\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln 2 - 1$$

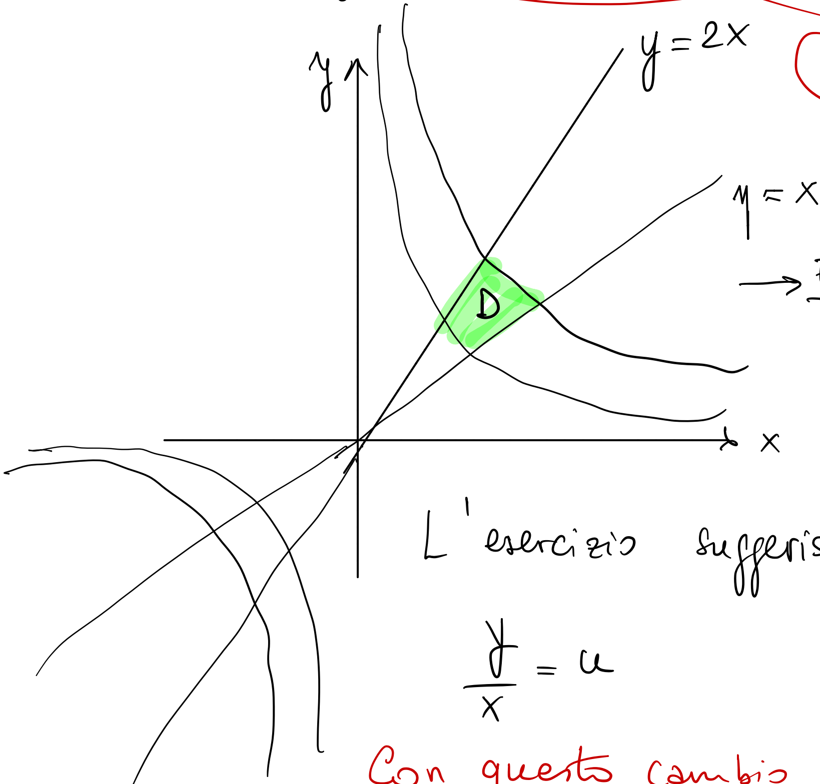
$$\int \log v\,dv = v\log v - \int \frac{v}{v}\,dv = v(\log v - 1) + c$$

ESEMPIO $\displaystyle\iint_D \frac{x^3}{y}\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\,dy$

dove $D = \{(x,y) : x \le y \le 2x,\quad 1 \le xy \le 2\}$

$x > 0$

$1 \le \frac{y}{x} \le 2.$



→ Esercizio: provare a scrivere l'integrale in coord. standard

L'esercizio suggerisce il cambio

$$\frac{y}{x} = u \qquad xy = v$$

Con questo cambio D "diventa" $T = [1,2] \times [1,2]$

La trasf $\phi(u,v)$ è data da $\quad y^2 = uv \Rightarrow y = \sqrt{uv}$ perché siamo nel 1° quadrante e $y > 0$

$$\Rightarrow x = \frac{v}{y} = \frac{v}{\sqrt{uv}} = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$ biettiva da T a D.

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u}\right| = \left|-\frac{1}{2u}\right| = \frac{1}{2u}$$

$$\iint_D \frac{x^3}{y}\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\,dy = \iint_T \frac{v}{u}\,\frac{\mathrm{sen}\,v}{u}\,\frac{1}{2u}\,du\,dv =$$

$$\int_D \frac{x^3}{y} \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy = \iint_T \frac{v}{u}\,\frac{\operatorname{sen} v}{u}\,\frac{1}{2u}\,du\,dv =$$

$$= \int_1^2 du \int_1^2 dv \;\frac{v \operatorname{sen} v}{2u^3} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u^3} \int_1^2 dv \; v \operatorname{sen} v = \ldots \text{ facile!}$$

La più importante sostituzione: passaggio a coordinate polari.

qui u e v si chiamano ρ, θ.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

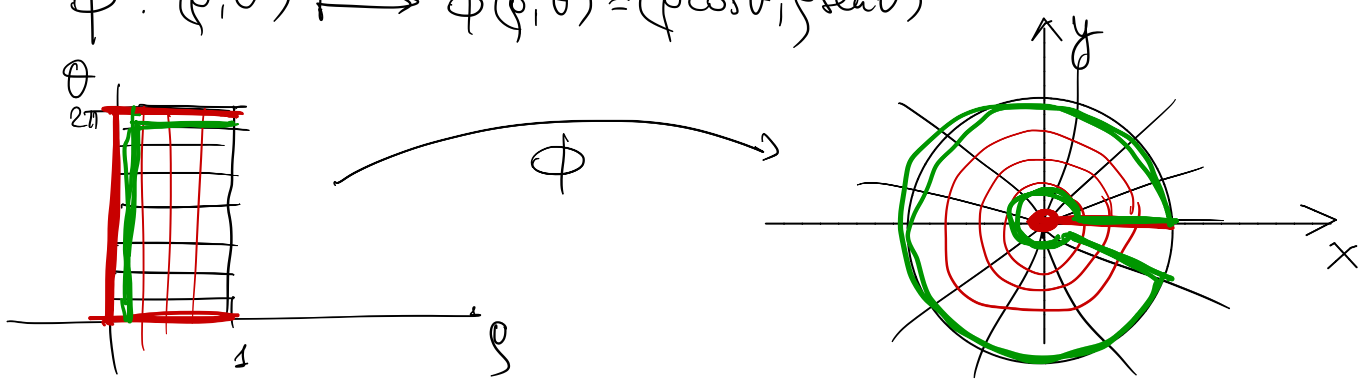
(x,y) variano in $\mathbb{R}^2$

(ρ,θ) " in $[0,+\infty)\times[0,2\pi]$

su sottoinsiemi di questi insiemi.

Esempio: se $(\rho,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$, allora (x,y) descrivono $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

$$\phi : (\rho,\theta) \longmapsto \phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$$



ϕ non è una biezione:

Tutto il segmento $\rho=0$ va nell'origine!

Inoltre i due segmenti $\theta=0$ e $\theta=2\pi$ vanno a sovrapporsi.

Non si applica direttamente il teorema. Tuttavia gli insiemi "problematici" hanno area nulla $\Rightarrow$ non contribuiscono all'integrale.

Si può procedere per approssimazione e si arriva ad una formula per il cambio di coordinate.

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\right| = \rho$$

TEOREMA Siano T e D due domini normali regolari risp. di $[0,+\infty)\times[0,2\pi]$ e $\mathbb{R}^2$, t.c. la trasf.
$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ verifichi $\Phi(T) = D$. Allora si ha

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

$\forall f$ continua in D.

Esempi

1) Volume della palla B_R

$$\mathrm{Vol}\ B_R = 2\iint_{C_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \qquad C_R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$$

coord. polari

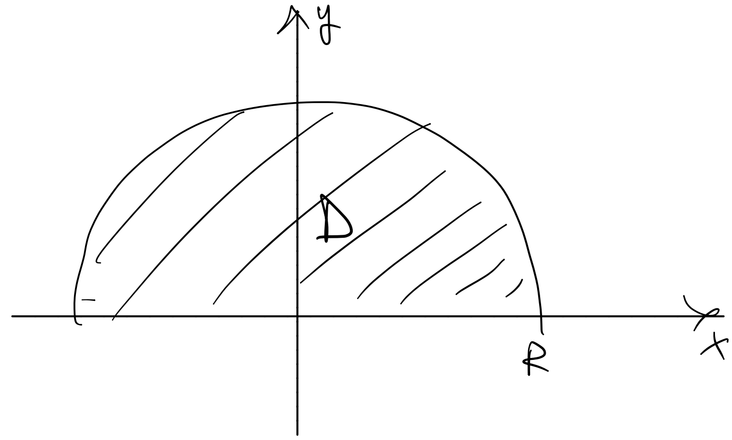
$$= 2\iint_T \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho\,\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho =$$

$R^2-\rho^2 = t$

$$= 2\pi\,\frac{2}{3}\,(R^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=R}^{\rho=0} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\phi : T \to C_R$, dove $T = [0,R]\times[0,2\pi]$.

2) Baricentro del semicerchio



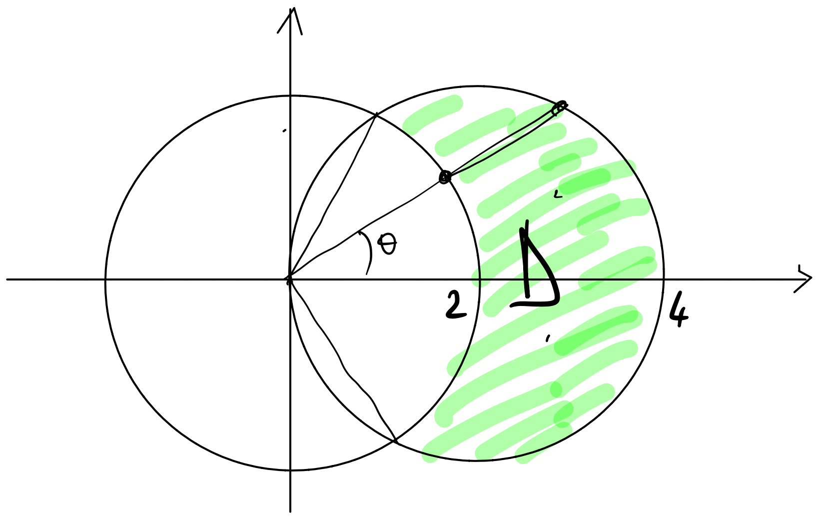
$$y_B = \frac{1}{\text{area } D} \iint_D y \, dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} d\rho \quad \rho \,\text{sen}\,\theta \; \rho =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \,\text{sen}\,\theta}_{2} \cdot \underbrace{\int_0^{R} \rho^2 \, d\rho}_{\frac{R^3}{3}} = \frac{4}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

ESERCIZIO. Calcolare il baricentro della regione piana

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4 \le x^2+y^2 \le 4x\}$$



$x^2+y^2=4x$

$(x^2-4x+4)+y^2=4$

circ. di centro $(2,0)$ e raggio 2.

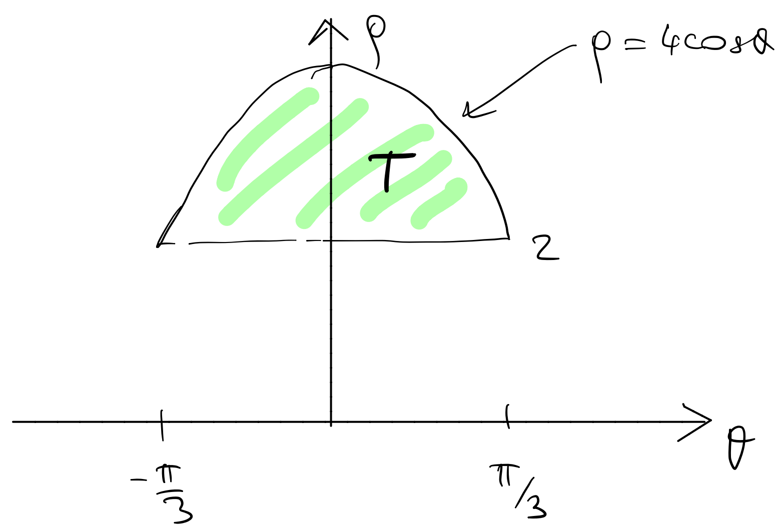
$$x^2+y^2 \geq 4 \iff \rho \geq 2.$$

$$x^2+y^2 \le 4x \iff \rho^2 \le 4\rho\cos\theta \iff \rho \le 4\cos\theta$$

D si trasforma, in coord. polari in

$$T = \left\{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \ , \ 2 \le \rho \le 4\cos\theta\right\}$$

T è fatto così:



$y_B = 0$ per simmetria (rifarlo analiticamente

$$x_B = \frac{1}{\text{area } D} \iint_D x \, dx\, dy$$

$$\text{Area } D = \iint_D 1 \, dx\,dy = \iint_T \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_2^{4\cos\theta} d\rho \, \rho =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \int_2^{4\cos\theta} d\rho \, \rho = \int_0^{\pi/3} d\theta \left(16\cos^2\theta - 4\right) =$$

$$= 16 \int_0^{\pi/3} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \, d\theta - \frac{4\pi}{3} = 16 \, \frac{\pi}{6} + 8 \int_0^{\pi/3} \cos 2\theta \, d\theta - \frac{4\pi}{3} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 4 \, \text{sen} \, 2\theta \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\iint_D x \, dx\,dy = 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \int_2^{4\cos\theta} d\rho \, \rho^2 \cos\theta =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \cos\theta \cdot \frac{1}{3} \left(64\cos^3\theta - 8\right) = \frac{128}{3} \int_0^{\pi/3} \underbrace{\cos^4\theta}_{\frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}} \, d\theta - \frac{16}{3} \int_0^{\pi/3} \cos\theta \, d\theta$$

$$\frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1+\cos 4\theta}{2} + 2\cos(2\theta)\right)$$