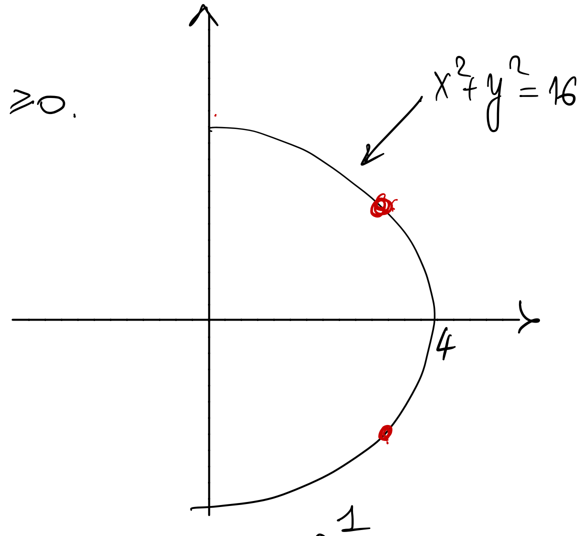
$$\int_\Gamma x y^4 \, ds = (*) \qquad \Gamma : \quad x^2 + y^2 = 16, \quad x \geq 0.$$



Parametrizziamo Γ:

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4 \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$(*) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 4\cos\theta \cdot 4^4 \operatorname{sen}^4\theta \; 4\,d\theta = 2^{12} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta = 2^{12} \int_{-1}^{1} t^4 \, dt = \frac{2^{12} \cdot 2}{5} = \frac{2^{13}}{5}$$

$\operatorname{sen}\theta = t$

$\cos\theta \, d\theta = dt$

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} \, d\theta = $$

$$= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2\theta + 16 \cos^2\theta} \, d\theta = 4 \, d\theta.$$

Per una curva espressa nella forma $\rho = \rho(\theta)$ $(\equiv 4)$

$$ds = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \, d\theta = 4 \, d\theta$$

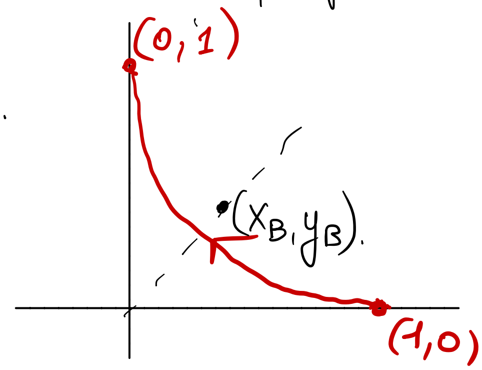
per noi!

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad x'(\theta) = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad y'(\theta) = \rho'(\theta)\operatorname{sen}\theta + \rho(\theta)\cos\theta$$

ES. 11.12 Baricentro del 4° di asteroide di eq^{ni} parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



$$\cos t = \sqrt[3]{x}$$
$$\Downarrow$$
$$t = \arccos \sqrt[3]{x}$$

$$y = \operatorname{sen}^3\left(\arccos \sqrt[3]{x}\right) = \left(1 - \cos^2\left(\arccos \sqrt[3]{x}\right)\right)^{3/2} = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$x_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x \, ds \qquad\qquad y_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y \, ds.$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} dt \; 3 \cos t \operatorname{sen} t = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{9 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} = \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t} =$$
$$= 3 |\operatorname{sen} t| |\cos t| = 3 \cos t \operatorname{sen} t$$

$$x_B = \frac{2}{\cancel{3}} \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \; \cancel{3} \cos t \operatorname{sen} t = 2 \int_0^1 z^4 \, dz = \frac{2}{5}$$

$$\cos t = z$$
$$-\operatorname{sen} t \, dt = dz$$

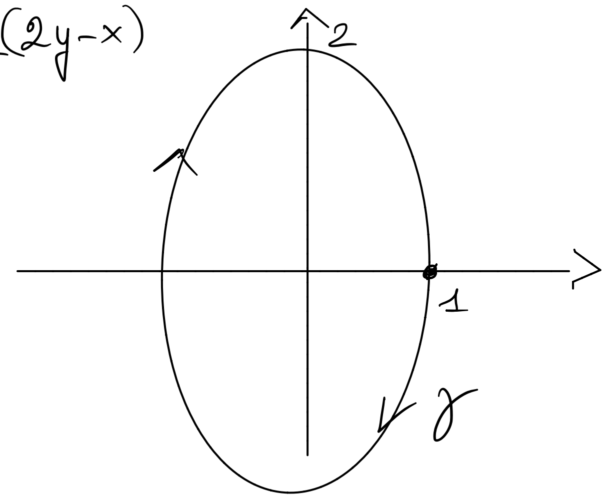
$$y_B = x_B = \frac{2}{5}$$ da fare!

11.8 Calcolare il lavoro del campo vett. $\underline{F} = (y+3x\,,\,2y-x)$ per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse $\boxed{4x^2+y^2=4}$ in senso orario.

OSS Il campo non è conservativo perché non è irrotazionale.

$$\frac{\partial}{\partial y}(y+3x) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial x}(2y-x)$$

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$



Parametrizziamo γ in verso antiorario:

$$\gamma^- \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = -\int_{\gamma^-}\underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = -\int_0^{2\pi}\left(F_1(\gamma^-(t))\,x'(t)+F_2(\gamma^-(t))\,y'(t)\right)dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left[(2\sin t+3\cancel{\cos t})(-\text{sen}\, t)+(4\,\cancel{\text{sen}\, t}-\cos t)\,2\cos t\right]dt$$

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}\, t\cos t\,dt = 0$$

$$= -\int_0^{2\pi}(-2)\,dt = 4\pi$$

OSS Il campo

$\underline{F} = (y+3x\,,\,2y-x)$ si può scrivere come

$$\underline{F} = \underbrace{(3x,2y)}_{\underline{G}} + \underbrace{(y,-x)}_{\underline{H}} \implies \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \underbrace{\int_\gamma \underline{G}\cdot\underline{T}\,ds}_{=\,0} + \int_\gamma \underline{H}\cdot\underline{T}\,ds$$

conservativo! perché irrotazionale su tutto $\mathbb{R}^2$

Parametrizziamo γ in verso orario!

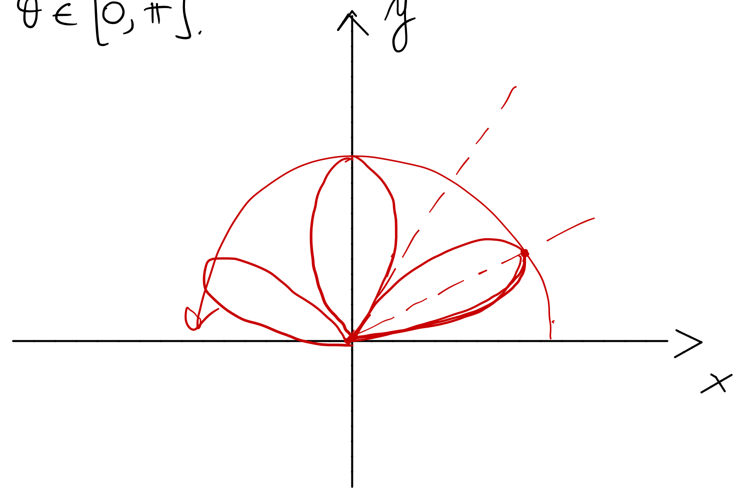
$$\gamma \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2 \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

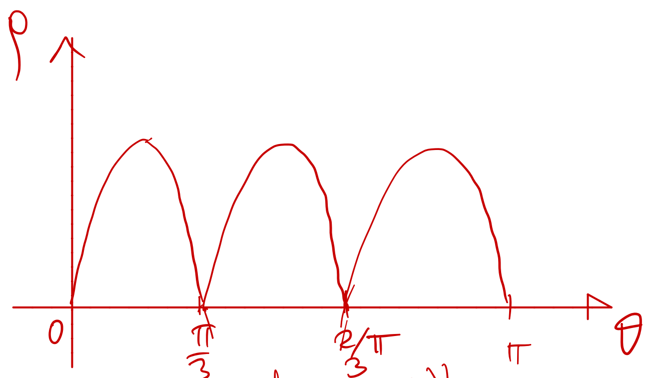
un altro modo è quello di sostituire t con $2\pi - t$

$$\gamma \quad \begin{cases} x = \cos(2\pi - t) = \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen}(2\pi - t) = -2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

11.17 Disegnare la curva γ del piano xy che si scrive, in coord. polari $\rho = |\text{sen}(3\theta)|$ $\theta \in [0, \pi]$.

E' una curva regolare?





$\rho = |\text{sen}(3\theta)|$

Eq^{ni} parametriche
$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = |\text{sen}\, 3\theta| \cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta = |\text{sen}\, 3\theta|\, \text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Per essere regolare deve essere $x(\theta), y(\theta) \in C^1$

questo è falso nei pti $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$. (anche in $\theta = 0$, $\theta = \pi$)

Esercizio verificare che $x(\theta)$ non è derivabile in θ_0, θ_1.
$\Rightarrow \gamma$ non è regolare in θ_0, θ_1.

Verifichiamo che γ è regolare in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Longrightarrow$ regolare a tratti

γ è $C^1\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Serve anche che $(x'(\theta), y'(\theta)) \neq (0,0) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 \neq 0$

vera perché in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ $\rho(\theta)$ non si annulla.

La curva non è semplice perché $\gamma(0) = \gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \gamma\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \gamma(\pi) = (0,0)$

Trovare tutte le costanti $a, b \in \mathbb{R}$ che rendono conservativo nel suo dominio il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2y^2} + \frac{2x}{1+x^2}, \frac{x}{1+x^2y^2} - b\cos y \right)$$

e trovarne un potenziale.

Dominio: $\mathbb{R}^2$ (sempl. connesso)

conservativo $\Longleftrightarrow$ irrotazionale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ay}{1+x^2y^2} + \cancel{\frac{2x}{1+x^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2} - \cancel{b\cos y} \right)$$

$$a\,\frac{1+x^2y^2 - y\,2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}.$$

$$a\,\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

Il campo è conservativo per $a=1$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Prendiamo $a=1$. Cerchiamo il potenziale $V(x,y)$

$$V(x,y) = \int \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = y \int \frac{dx}{1+(xy)^2} + \ln(1+x^2) =$$

$$= \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} \operatorname{arctg}(xy) + \ln(1+x^2) + g(y) = \operatorname{arctg}(xy) + \ln(1+x^2) - b\,\mathrm{sen}\,y + c$$

Imponiamo

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \cancel{\frac{x}{1+x^2y^2}} - b\cos y$$

$$\cancel{\frac{x}{1+x^2y^2}} + g'(y) \implies g'(y) = -b\cos y \Rightarrow$$

$$\implies g(y) = -b\,\mathrm{sen}\,y + c$$

Determinare se la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{y^2\cos(xy^2)}{z} - 2z\right)dx + \frac{2xy\cos(xy^2)}{z}\,dy - \left(\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{z^2} + 2x\right)dz$$

è esatta nel suo dominio,

e calcolare l'integrale di ω lungo <u>tutte</u> le curve regolari aventi per estremi $(0,2,1)$ e $(\pi,1,3)$.

<u>Dominio</u>: $\mathbb{R}^3 \setminus$ piano xy non è connesso, ma è unione disgiunta di due aperti (il semispazio $\{z>0\}$ e quello $\{z<0\}$) semplicemente connessi.

Se dimostro che il campo è irrotazionale, automaticamente è conservativo in ciascuno dei due semispazi, e quindi conservativo nel suo dominio.

Verifico che è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{verificare!}$$

$$V(x,y,z) = -\int\left(\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{z^2} + 2x\right)dz = \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{z} - 2xz + \cancel{g(x,y)}\ h(x)$$

Impongo

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \cancel{\frac{2xy\cos(xy^2)}{z}}$$

$$\parallel$$

$$\cancel{\frac{2xy\cos(xy^2)}{z}} + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \Rightarrow g_y(x,y) \equiv 0 \Rightarrow g(x,y) = h(x)$$

Finalmente

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \cancel{\frac{y^2\cos(xy^2)}{z}} \cancel{- 2z}$$

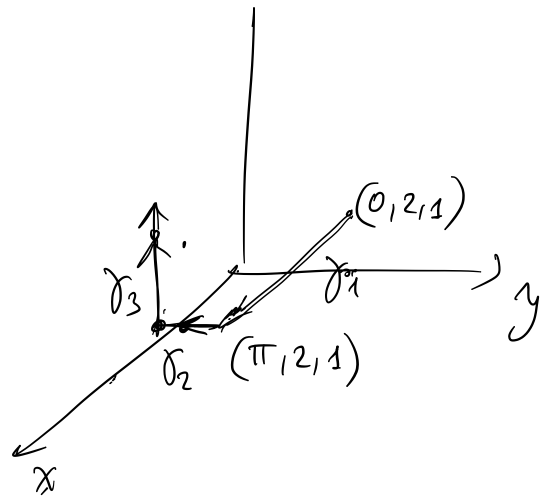
$$\parallel$$

$$\cancel{\frac{y^2\cos(xy^2)}{z}} \cancel{- 2z} + h'(x) \Rightarrow h'(x) \equiv 0 \Rightarrow h(x) = c$$

$$\text{Lavoro} = V(\pi,1,3) - V(0,2,1) = \ldots$$

In alternativa, senza calcolare un potenziale, avrei potuto calcolare il lavoro lungo una particolare curva che collega $(0,2,1)$ a $(\pi,1,3)$

Per es. $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$



$$\gamma_1 \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad t \in [0,\pi].$$

in verso opposto.

$$\gamma_2^- \quad \begin{cases} x = \pi \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad t \in [1,2]$$

$$\gamma_3 \quad \begin{cases} x = \pi \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [1,3]$$