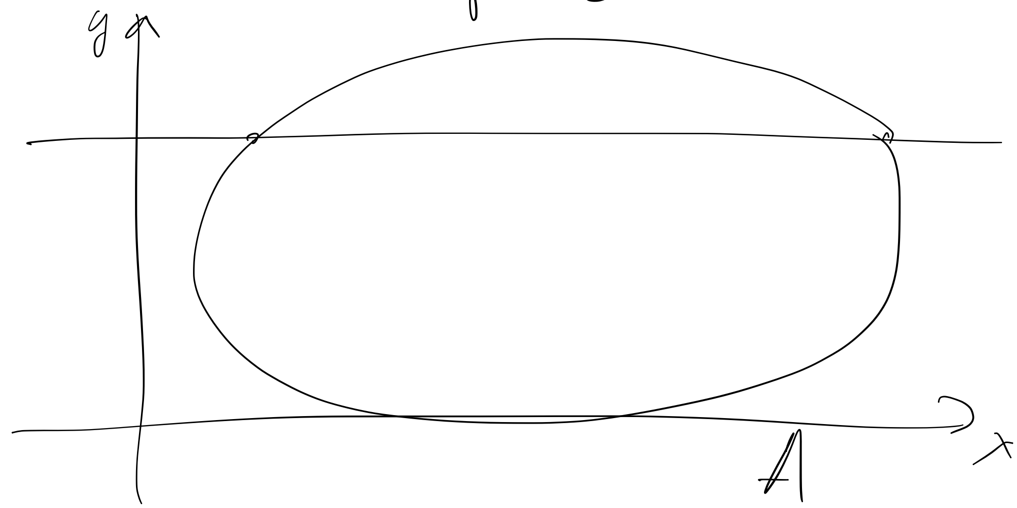
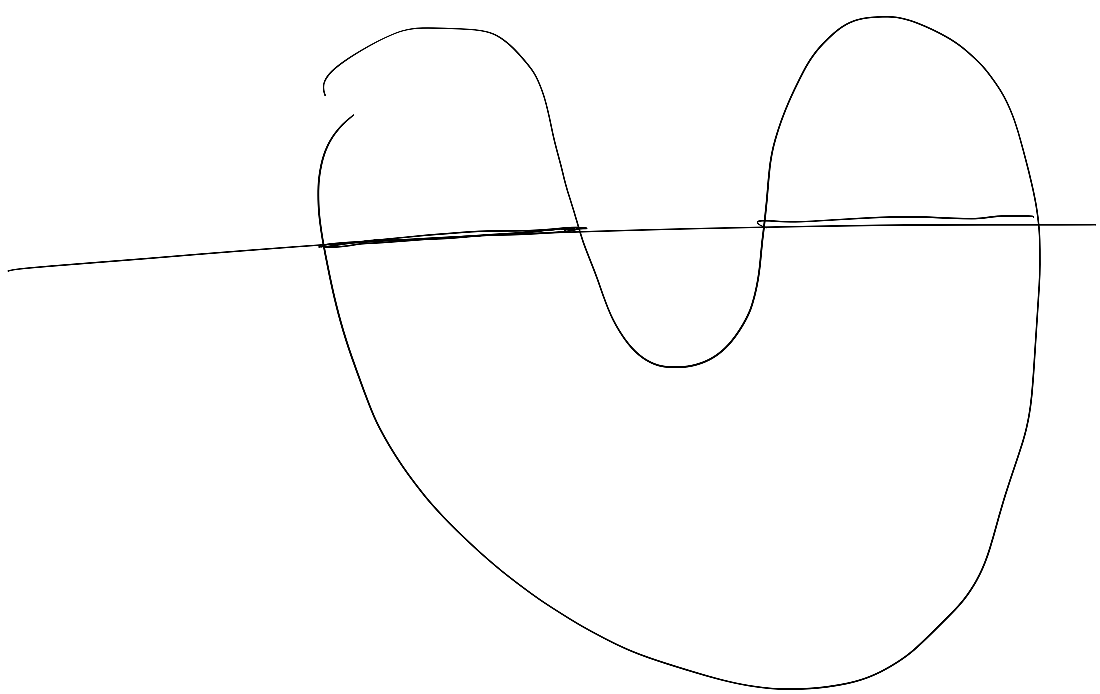
Abbiamo visto la procedura per trovare un potenziale di un campo vettoriale conservativo.

Si fissa una delle due variabili e si trova l'integrale indefinito rispetto all'altra. Successivamente si deriva rispetto all'altra variabile e si uguaglia la derivata parziale alla seconda componente del campo.

Questa procedura è corretta solo se le sezioni rispetto alla variabile in cui si integra sono intervalli



La procedura è più delicata se A è fatto così



ESEMPIO Consideriamo una forma differenziale del tipo

$$\omega = \underbrace{A(x,y)}_{\substack{\parallel \\ 0}} dx + B(x,y)\,dy = B(x,y)\,dy$$

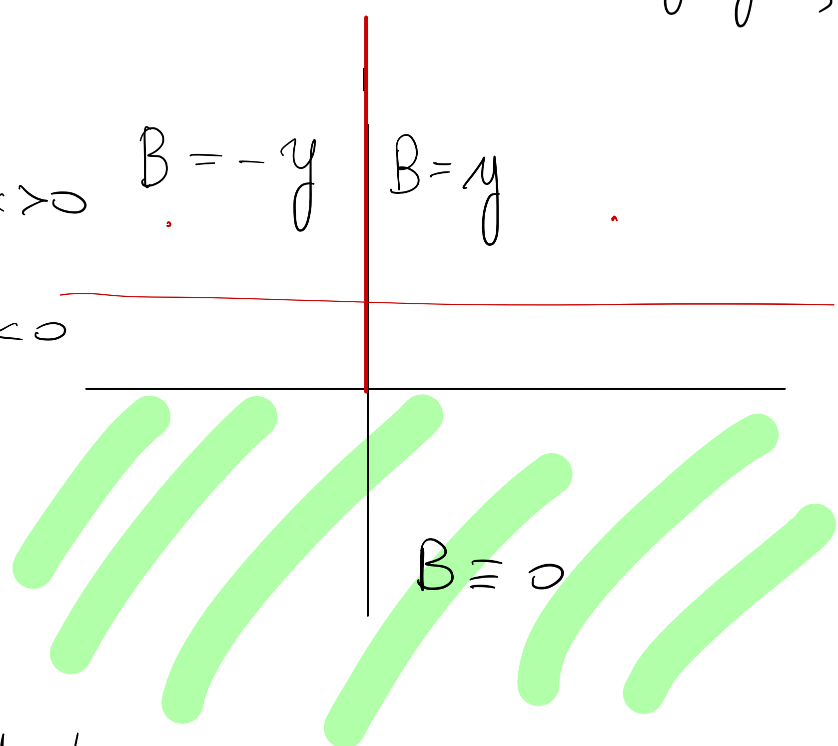
Se ω è esatta, cerco un potenziale. Integrando la prima componente (nulla) troverei

$$V(x,y) = V(y)$$

Non è sempre così:

ESEMPIO ω sia definita solo nell'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geq 0\}$

$$B(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ y & \text{se } y > 0,\ x > 0 \\ -y & \text{se } y > 0 \quad x < 0 \end{cases}$$



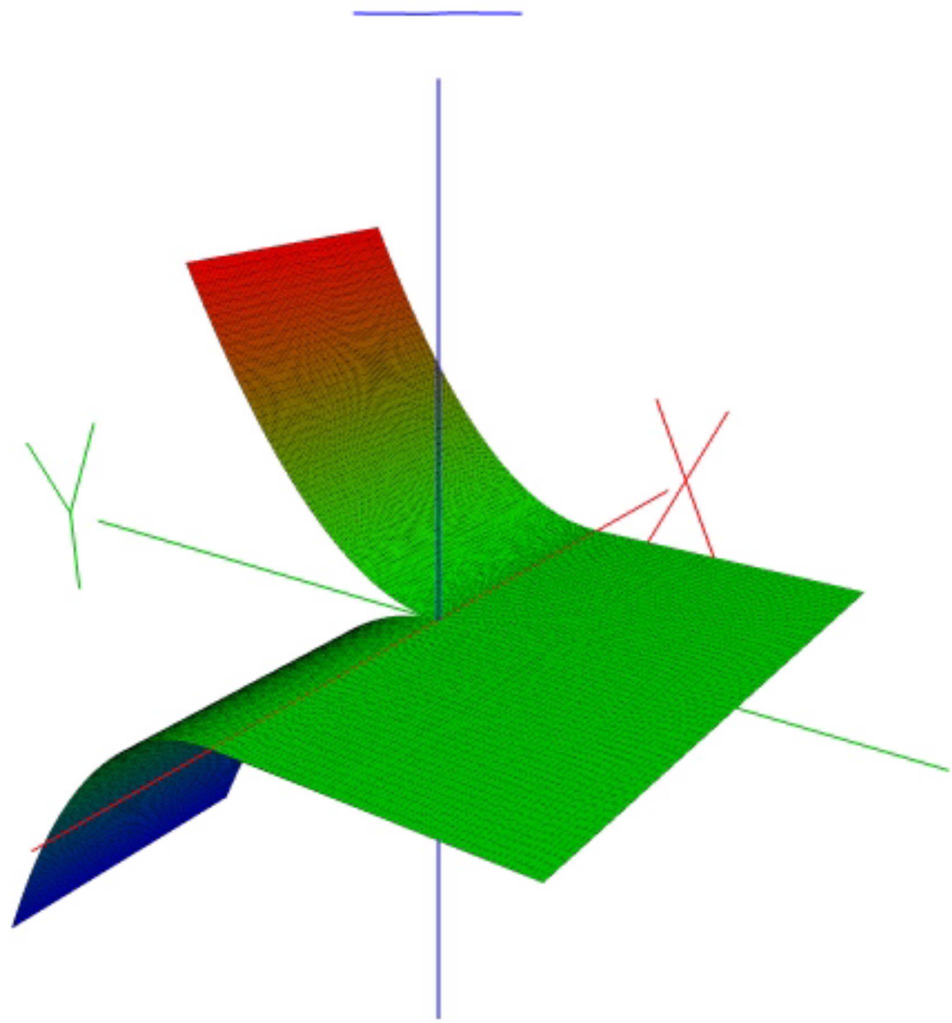
B continua.

$\omega = B(x,y)\,dx$.

$\Rightarrow V = V(y)$ falso!

Infatti un potenziale è dato da

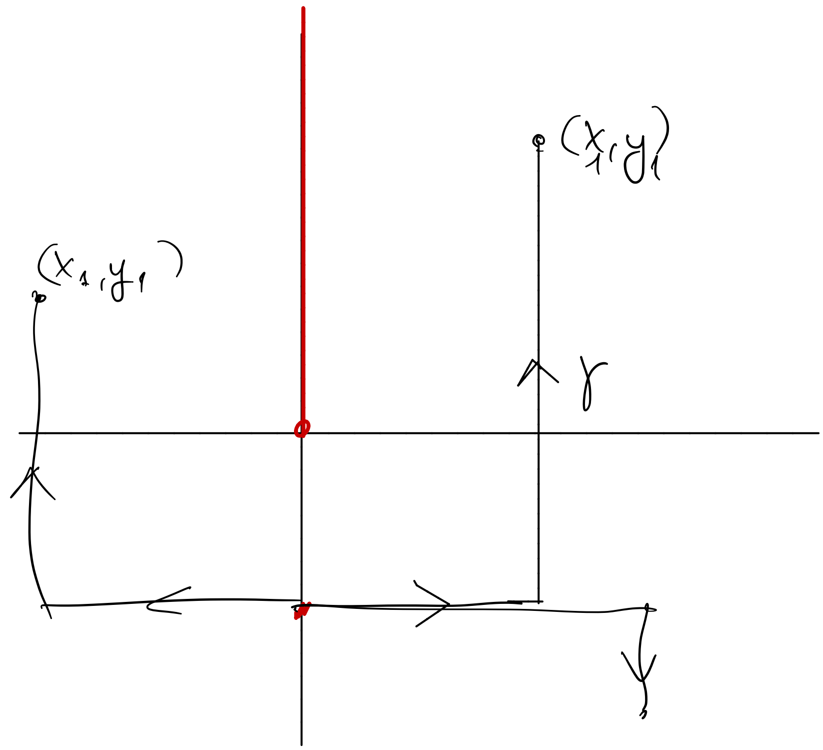
$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \\ \dfrac{y^2}{2} & \text{se} \quad y > 0,\ x > 0 \\ -\dfrac{y^2}{2} & \text{se} \quad y > 0 \quad x < 0. \end{cases} \longleftarrow \text{dipende da } x$$



$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \\ \dfrac{y^2}{2} & \text{se} \quad y > 0, \quad x > 0 \\ -\dfrac{y^2}{2} & \text{se} \quad y > 0 \quad x < 0 \end{cases}$$

In questo caso, per trovare un potenziale avrei potuto fissare un punto (per es. $(0,-1)$) e definisco

$$V(x_1,y_1)=\int_{\gamma_{(x_1,y_1)}} B(x,y)\,dy$$



Quanti potenziali ha un campo conservativo?

Evidentemente, se $V(x,y)$ è un potenziale del campo $\underline{F}(x,y)$, cioè $\nabla V \equiv \underline{F}$, anche $V(x,y)+c$ lo è.

Il potenziale è determinato a meno di una costante additiva.

Ce ne sono altri? No, almeno se A è connesso

Se $V(x,y)$ e $U(x,y)$ sono due potenziali dello stesso campo in A aperto connesso, allora pongo $W(x,y)=V(x,y)-U(x,y)$

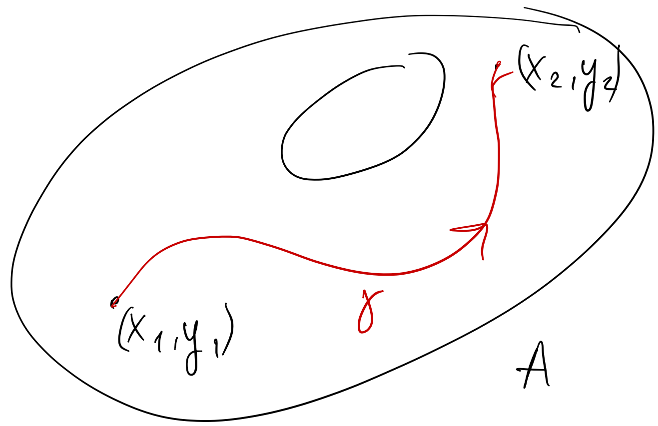
$$\nabla W = \nabla V - \nabla U = \underline{F}-\underline{F} \equiv 0 .$$

PROP. Se A è un aperto connesso, e se $\nabla W \equiv 0$ in A, allora

$W \equiv c$ in A.

DIM.

Siano (x_1,y_1) e $(x_2,y_2) \in A$, e sia γ una curva regolare a tratti che collega (x_1,y_1) a (x_2,y_2)



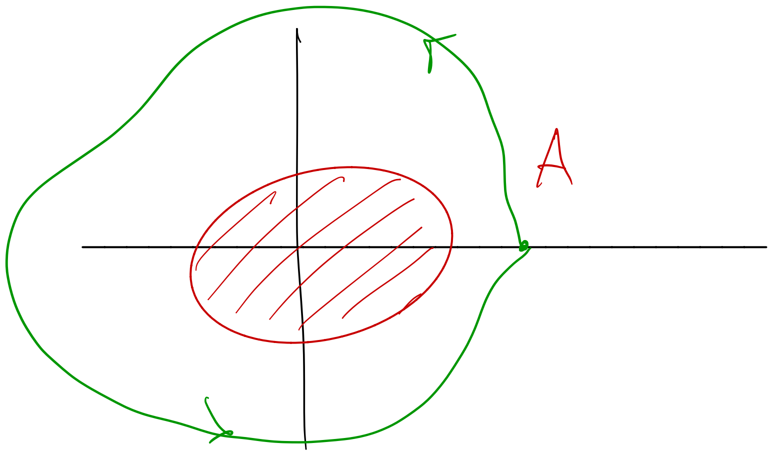
$$W(x_2,y_2) - W(x_1,y_1) = \int_\gamma \underbrace{\nabla W}_{=0} \cdot \underline{T}\, ds = 0$$

$$\Rightarrow W(x_2,y_2) = W(x_1,y_1)$$

$\Longrightarrow$ W è costante, perché i pti erano arbitrari.

COME PROCEDERE SE ABBIAMO UN CAMPO VETTORIALE IRROTAZ. in un aperto non semplicemente connesso?

Per esempio, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ oppure $A = \mathbb{R}^2 \setminus K$ con K limitato e chiusura di un aperto connesso.



Sia $\underline{F}$ irrotazionale in un tale A. E' conservativo? sappiamo che potrebbe non esserlo.

Ovviamente, potremmo provare a trovare un potenziale, ma non sempre ci si riesce.

Si può procedere così.

Si sceglie una curva γ chiusa e semplice che giri intorno alla lacuna.

Calcolo il lavoro lungo questa curva.

Se il lavoro $\int_\gamma F \cdot T \, ds$ è diverso da zero $\Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo

Se invece $\int_\gamma F \cdot T \, ds = 0$, allora il campo è conservativo.

Lo dimostreremo in seguito (post teorema di Stokes).

ESEMPIO.

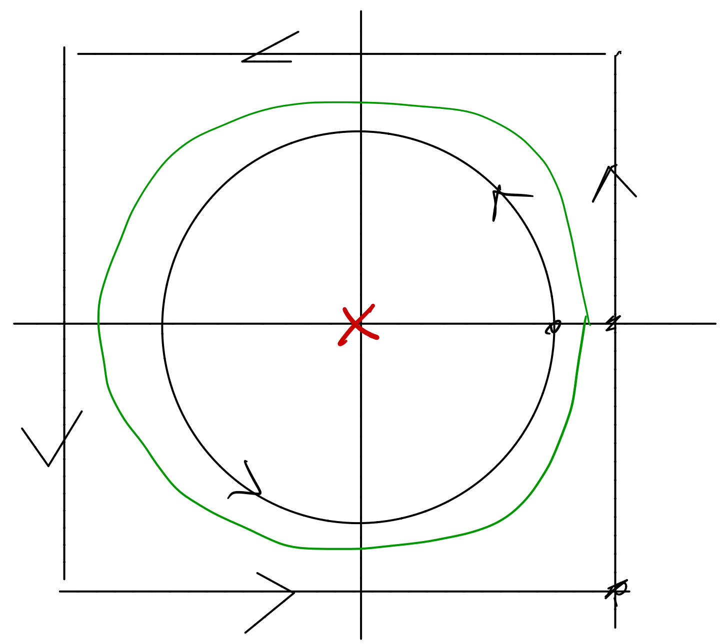
Sia dato il campo $\underline{F}(x,y) = \left(\frac{3y^2}{9y^4+x^2}, \frac{6xy}{9y^4+x^2} + 2 \right)$

definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si verifica facilmente che $\underline{F}$ è irrotazionale (Farlo!)

E' conservativo o no?

Prendo una curva γ che gira intorno all'origine e su cui sia facile fare l'integrale.



Varie possibilità

γ = circonferenza unitaria

γ = quadrato

γ = ovale $9y^4 + x^2 = 1$

$$x = \pm\sqrt{1-9y^4}$$

$$\gamma \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma F \cdot T \, ds = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3\operatorname{sen}^2\theta}{9\operatorname{sen}^4\theta + \cos^2\theta} \operatorname{sen}\theta + \left(\frac{6\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{9\operatorname{sen}^4\theta+\cos^2\theta} + \cancel{2} \right) \cos\theta \right) d\theta$$

$= 0$ $\quad \boxed{\Longrightarrow}$ $\underline{F}$ è conservativo $\Rightarrow$ Trovare il potenziale (ottimo esercizio)

$$\int_0^{2\pi} \frac{3\,\text{sen}^2\theta}{9\,\text{sen}^4\theta + \cos^2\theta}\,\text{sen}\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\,\text{sen}^3\theta\, d\theta}{9\,\text{sen}^4\theta + \cos^2\theta} = 0$$

f periodica

f dispari

Campi vettoriali irrotaz. ma non conservativi (su domini non sempl. connessi)

OSS Tutti i campi irrotaz. sono localmente conservativi

Anche $\underline{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ (che non è conservativo nel suo dominio)

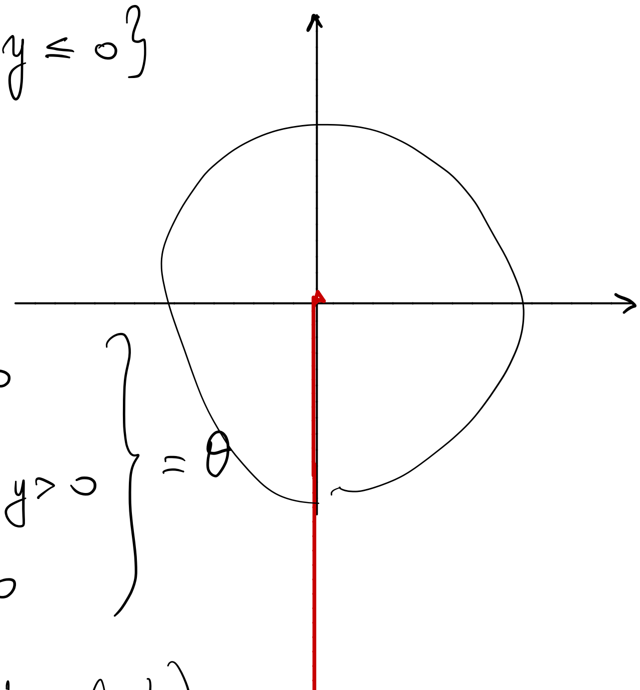
è conservativo in ogni aperto semplic. connesso in cui è definito.

Per esempio, è conservativo in $A = \{(x,y) : x > 0\}$

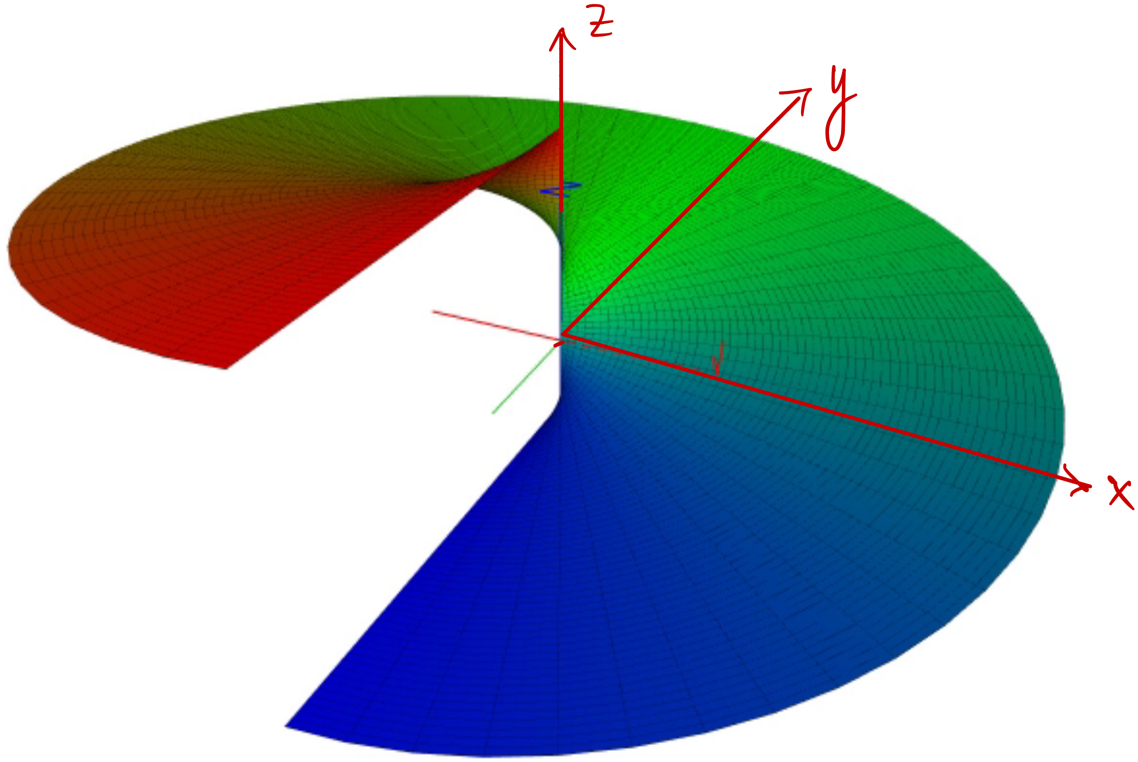
e anche in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$

Si vede facilmente che un potenziale in quest'ultimo A è

$$V(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \theta$$



V è $C^1(A)$ e $\nabla V = \underline{F}$ (verificarlo!)



$$V(x,y)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se} \quad x>0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \quad x=0,\ y>0 \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

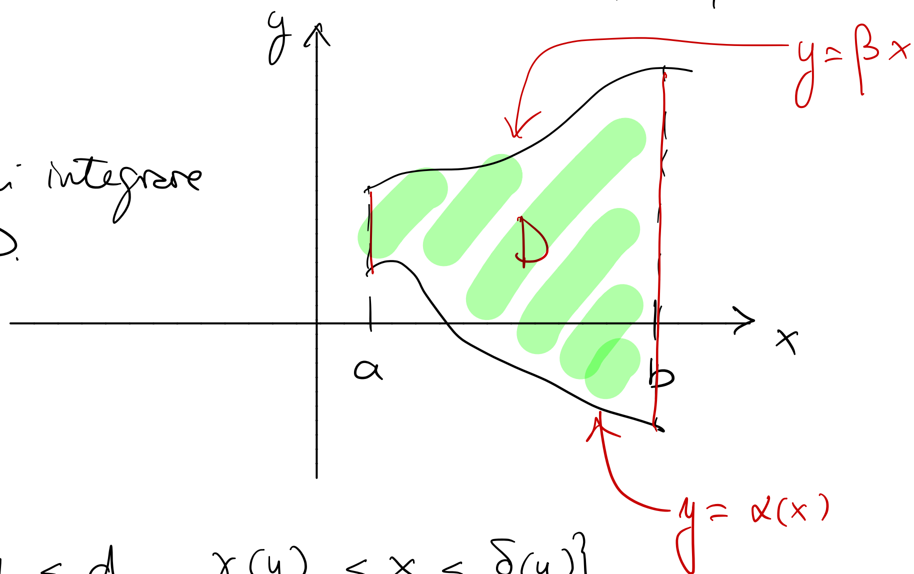
Integrali doppi

Dominio normale di $\mathbb{R}^2$.

DEF Si dice **dominio normale rispetto alla x**, o concisamente **dominio x-normale** un insieme della forma

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b , \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

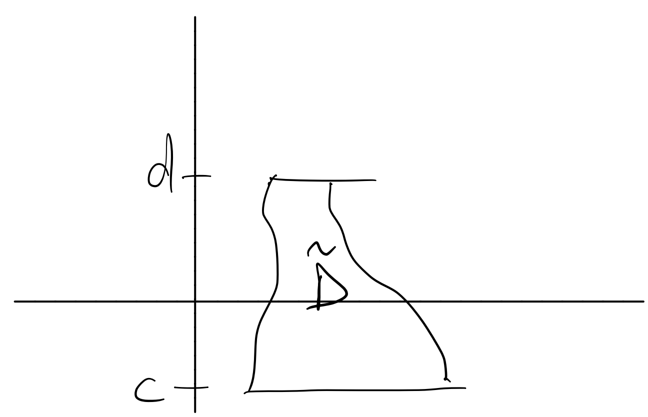
dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e t.c. $\alpha(x) \leq \beta(x)$ $\forall x \in [a,b]$.



L'obiettivo sarà quello di integrare una $f(x,y)$ definita in D.

Domini y-normali

$$\tilde{D} = \{ (x,y) : \quad c \leq y \leq d, \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$$



Misura (area) di un dominio x-normale:

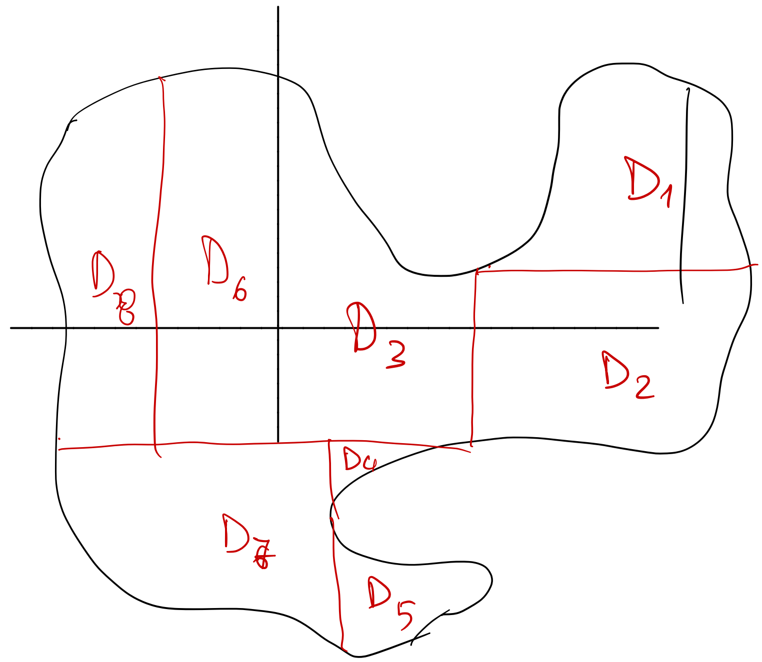
$$\text{Area } D = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx , \qquad \text{Area } \tilde{D} = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\, dy$$

Bisognerebbe provare che, se il dominio è sia x-normale che y-normale, per esempio se D è un insieme convesso, allora viene la stessa area con i due integrali.

Se D è unione di domini normali senza pti interni in comune, allora

$$\text{area } D = \sum_{i=1}^{n} \text{area}(D_i)$$

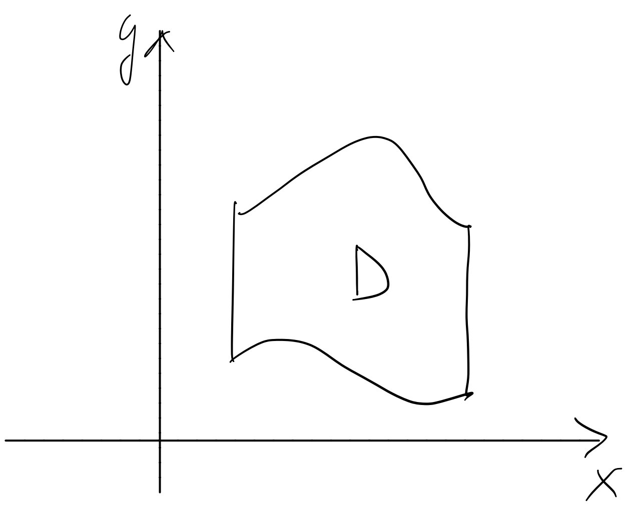
e non dipende dalla scomposizione.

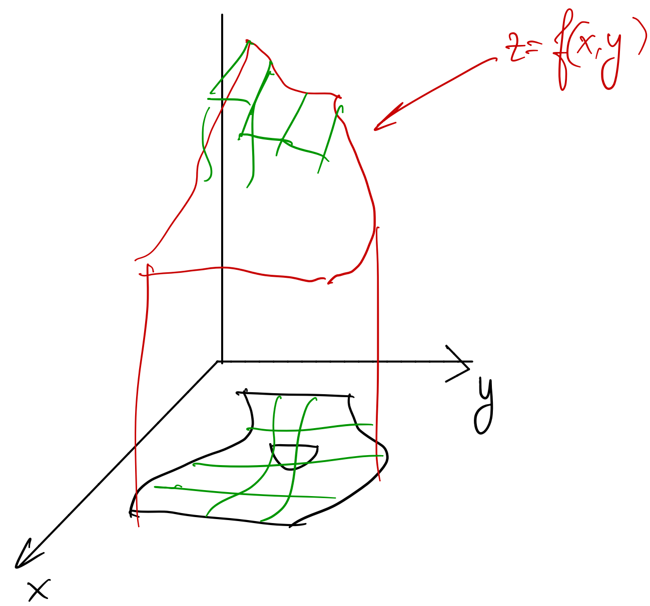


Sia D dominio x-normale

Sia $f(x,y)$ una funzione

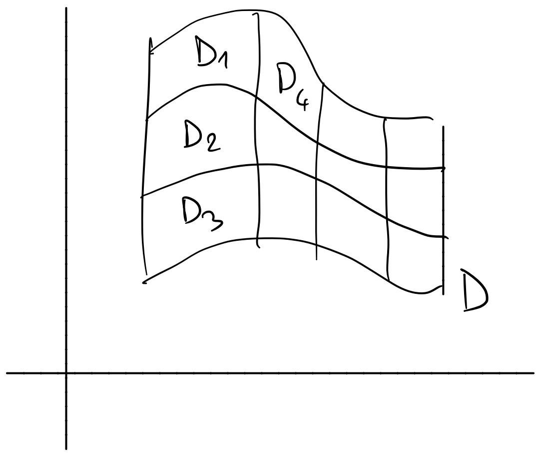
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.

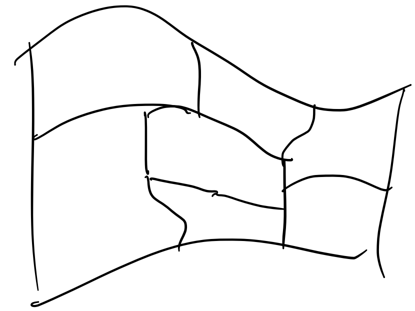




Vogliamo definire l'integrale su D di f che misuri il volume (col segno) del sottografico di f.

Se D è x-normale, chiamo P una partizione di D, cioè una decomposizione di D in sottodomini normali $D_1, \dots D_n$





$\forall$ partizione $P = \{D_1, \dots D_n\}$ di D, $\forall$ sottodominio D_i, considero

$M_i = \sup\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y)$ $\Rightarrow$ definisco la somma superiore

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{ area}(D_i)$$

e la somma inferiore

$m_i = \inf\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y)$

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ area}(D_i)$$

Si dimostra che si ha sempre

$$\sup_{P \text{ partiz}} s(P) \leq \inf_{P \text{ partiz.}} S(P)$$

DEF. Se $\sup\limits_{P} s(P) = \inf\limits_{P} S(P)$, diremo che f è integrabile secondo Riemann in D, e porremo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

Questo vale sia se D è x-normale, sia se è y-normale.

TEOREMA Sia f continua in D dominio normale

$\Rightarrow$ f è Riemann integrabile

PRINCIPALI PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

D dominio normale

$f(x,y), g(x,y) : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili su D. $\left(f, g \in \mathcal{R}(D)\right)$

1) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — Linearità dell' $\iint$.

$c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y) \in \mathcal{R}(D)$

$$\iint_D \left(c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\right) dx\,dy = c_1 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + c_2 \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

2) monotonia $\quad f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

3) se $f(x,y) \equiv c$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = c \text{ area } D$$

In particolare $\quad$ area $D = \iint_D 1\,dx\,dy$

4) Se $f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow |f(x,y)| \in \mathcal{R}(D)$, e vale la dis. triangolare

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

5) $$m \ \text{area}(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \ \text{area}(D)$$

dove $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ $\qquad M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$

Segue dalla monotonia e dal pto 3)

6) Se $f \in C(D)$, allora $\exists\, (x_0,y_0) \in D$ t.c.

$$f(x_0,y_0) = \underbrace{\frac{1}{\text{area } D} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{valor medio di } f}$$