Foglio 11 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

13 dicembre 2015

11.1 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali curvilinei lungo la curva Γ:

$$\int_\Gamma (2+x^2y)\,ds, \quad \Gamma: x^2+y^2=1,\ y\ge 0;$$

$$\int_\Gamma y\,ds, \quad \Gamma: x=t^2,\ y=t,\ 0\le t\le 2;$$

$$\int_\Gamma \frac{y}{x}\,ds, \quad \Gamma: x=t^4,\ y=t^3,\ \frac{1}{2}\le t\le 1;$$

$$\int_\Gamma xy^4\,ds, \quad \Gamma: x^2+y^2=16,\ x\ge 0.$$

11.2 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva di equazione

$$x=(t-\sin t),\ y=(1-\cos t),\ t\in[0,2\pi] \quad \text{(cicloide)}.$$

11.3 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva di equazione

$$y=(1-x^{2/3})^{3/2},\ x\in[0,1] \quad \text{(asteroide)}.$$

11.4 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare

$$\rho=2(1+\cos\theta), \qquad \theta\in[-\pi,\pi] \quad \text{(cardioide)}.$$

11.5 Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$I=\int_{\mathscr{C}} (2xy-5)\,dx+(x^2+3y^2)\,dy$$

essendo $\mathscr{C}$

i) il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$,

ii) l'arco di parabola $y=x^2-1$ percorso da $(-1,0)$ a $(1,0)$.

11.6 Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}=\left\{\frac{-y}{r^n},\frac{x}{r^n}\right\}$$

calcolare il lavoro lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio $r>0$.

11.7 Esercizio

Assegnato il campo $\mathbf{F}=(2x^2,3y^2)$:

i) determinare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1,2)$,

ii) determinare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la poligonale

$$(0,0)\to(1,0)\to(1,2).$$

11.8 Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F}=(y+3x,2y-x)$ per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse $4x^2+y^2=4$ in senso orario.

11.9 Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathscr{C}} (x^2+y^2)\,ds$$

essendo $\mathscr{C}$ il segmento di estremi $(0,0)$ e $(3,4)$. Calcolare il massimo M di x^2+y^2 sul segmento e verificare la diseguaglianza

$$\int_{\mathscr{C}} (x^2+y^2)\,ds \le M \times lungh(\mathscr{C})$$

11.10 Esercizio

Verificare che la cardioide di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 1+\cos\theta\,, \quad \theta \in [0,2\pi]\,,$$

ha una "cuspide" per $\theta=\pi$, cioè un punto in cui il versore tangente "salta" da un valore al valore opposto.

11.11 Esercizio

Verificare che la curva

$$\gamma: \quad \begin{cases} x = \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2t\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

è una curva regolare. Calcolare il versore tangente e la retta tangente a γ per $t=\pi/3$.

11.12 Esercizio

Calcolare il baricentro del quarto di asteroide, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi/2]\,.$$

11.13 Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\,ds,$$

dove C è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

11.14 Esercizio

Data $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2+1}$, calcolare

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $x=e^t$, $y=\operatorname{sen}(t)$, t in $[0,\pi]$.

11.15 Esercizio

Detto γ l'arco di parabola di equazione $y=x^2$, con $x\in[0,1]$, calcolare

$$\int_\gamma x\,ds.$$

11.16 Esercizio

Disegnare la strofoide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^3 - t\,, \\ y = t^2 - 1\,. \end{cases}$$

E' regolare? E' semplice?

11.17 Esercizio

Disegnare la curva γ del piano xy che si scrive, in coordinate polari, $\rho = |\operatorname{sen} 3\theta|$, $\theta \in [0,\pi]$. E' una curva regolare?

11.18 Esercizio

Disegnare la curva γ di equazione polare

$$\rho = 2\cos^2\theta\,, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\,,$$

e dire se è regolare.

11.19 Esercizio

Sia $E = C_1 \cup C_2$, dove C_1 è il cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, e C_2 è il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1. Calcolare il baricentro della frontiera di E.

11.20 Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F} = (y + 3x, 2y - x)$ lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario.

11.21 Esercizio

Sia Γ_1 la parte di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 contenuta nel semipiano $y \leq 0$, orientata da $(-1,0)$ a $(1,0)$, e sia Γ_2 la frontiera del quadrato centrato nell'origine e lato 2, percorsa in senso antiorario.
Calcolare
i) il lavoro di $\mathbf{F}(x, y) = (x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)})$ lungo la curva orientata Γ_1;
ii) il lavoro di $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 2x)$ lungo la curva orientata Γ_2.

11.22 Esercizio

Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz,$$

dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e del piano $y = 2z$. **N.B.:** In seguito torneremo su questo esercizio usando il teorema di Stokes.