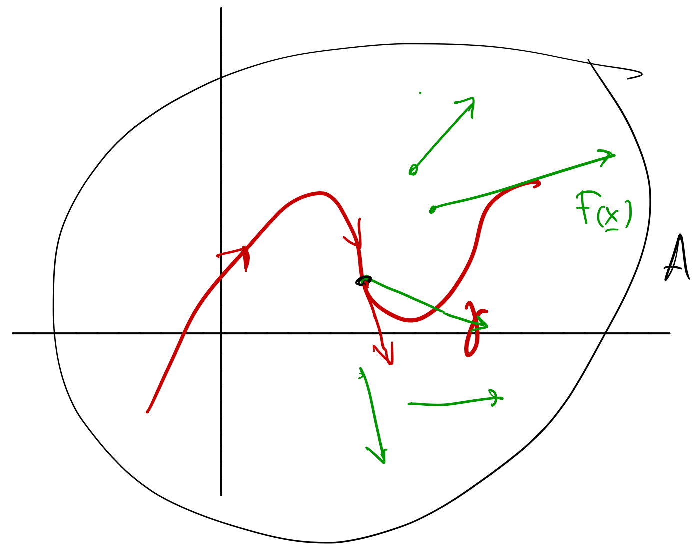
Lavoro di una forza lungo una curva γ.

(integrale di un campo vettoriale, o integrale di 2ª specie)

$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare

$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ campo vettoriale, $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto contenente $\gamma([a,b])$,

$\underline{x} \longmapsto \underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots F_N(\underline{x}))$ $\underline{F}$ continua



Definiamo l'integrale curvilineo del campo $\underline{F}$ lungo la curva $\underline{\gamma}$ come

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds$$

versore tangente alla curva

$$L = \int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\cancel{\|\underline{\gamma}'(t)\|}} \underbrace{\cancel{\|\gamma'(t)\|}dt}_{ds} =$$

$$= \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \left(F_1(\underline{\gamma}(t))\, x_1'(t) + F_2(\underline{\gamma}(t))\, x_2'(t) + \dots + F_N(\underline{\gamma}(t))\, x_N'(t) \right) dt$$

$$\underline{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$$

ESEMPIO Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$\underline{F}(x, y) = (\sqrt{y},\ x^3 + y)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$.

OSS Se invece di prendere γ, prendo una curva $\tilde{\gamma}$ "equivalente" a γ (cioè descrive lo stesso sostegno nello stesso verso o in verso opposto) come cambia il lavoro?
Se la curva viene percorsa nello stesso verso, il lavoro resta uguale, se la curva viene percorsa in senso opposto, il lavoro cambia segno. ($\underline{T}$ cambia segno).

DEFINIZIONE Un campo vettoriale $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ si dice conservativo se $\underline{F}(\underline{x}) = \nabla V(\underline{x})$, dove V è una funzione scalare definita in A, detta potenziale.

Se $\underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo vettoriale conservativo con potenziale V, allora il suo integrale lungo una qualsiasi curva regolare $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ vale:

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)\,dt \overset{F=\nabla U}{=} \int_a^b \underbrace{\nabla V(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)}_{\frac{d}{dt}\left[V(\underline{\gamma}(t))\right]}\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[V(\underline{\gamma}(t))\right]dt = V(\underline{\gamma}(t))\Big|_{t=a}^{t=b} =$$

$$= V(\underbrace{\underline{\gamma}(b)}_{\text{punto di arrivo di } \gamma}) - V(\underbrace{\underline{\gamma}(a)}_{\text{pto di partenza.}})$$

TEOREMA Sia $F : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale conservativo

aperto.

di potenziale V. Sia γ una curva regolare con sostegno in A che va dal punto P_1 al punto P_2 $(P_1, P_2 \in A)$.

Allora

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = V(P_2) - V(P_1)$$

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale.

Come riconoscere se è conservativo.

Supponiamo $\underline{F} \in C^1(A;\mathbb{R}^N)$. Allora $\Rightarrow V \in C^2(A)$.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i} \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i,j = 1 \dots N.$$

Def. Un campo vettoriale si dice <u>irrotazionale</u> se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } A.$$

<u>Abbiamo provato che:</u>

<u>**TEOREMA**</u> C.N. affinché un campo vettoriale C^1 sia conservativo è che sia irrotazionale

E' anche una C.S.? A volte sì, a volte no, dipende da A.

CAMPI VETTORIALI E FORME DIFFERENZIALI

$N=2$ per semplicità

Campi Vettoriali	Forme differenziali
$\underline{F}(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ $\underline{F}:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ campo vettoriale	$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ forma differenziale $F_1, F_2: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
Lavoro di $\underline{F}$ lungo la curva γ $\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_a^b [F_1(\underline{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)]dt$	$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ curva regolare $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_a^b [F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)]dt$
$\underline{F}$ campo vettoriale conservativo se $\exists V:A\to\mathbb{R}$ t.c. $\underline{F}=\nabla V$	ω si dice f.d. esatta se $\exists V: A\to\mathbb{R}$ t.c. $\omega = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$. Cioè se ω è il differenziale di V
V si dice potenziale di F	V si dice primitiva di ω.
F è irrotazionale se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$	ω si dice chiusa se vale la stessa cond^ne

Il lavoro di un campo vettoriale conservativo lungo una curva γ è pari alla differenza di potenziale tra i due estremi

L'integrale di una f.d. esatta lungo una curva γ è pari alla differenza tra i valori della primitiva nei due estremi della curva

C^1

$\underline{F}$ campo conservativo $\Rightarrow$ F irrotazionale

ω f.d. C^1 esatta $\Rightarrow$ ω chiusa.

Esempio di un campo vettoriale irrotazionale ma non conservativo.

esempio di una forma differenziale chiusa ma non esatta

$$\underline{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$ definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

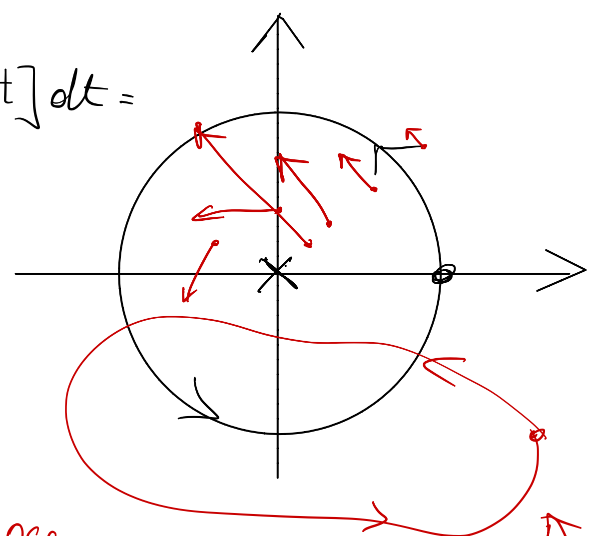
$\Longrightarrow$ $\underline{F}$ irrotazionale.

Ma $\underline{F}$ non è conservativo. Se lo fosse, l'integrale lungo ogni curva chiusa dovrebbe essere nullo.

Ma se prendo la circonferenza unitaria $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t]\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

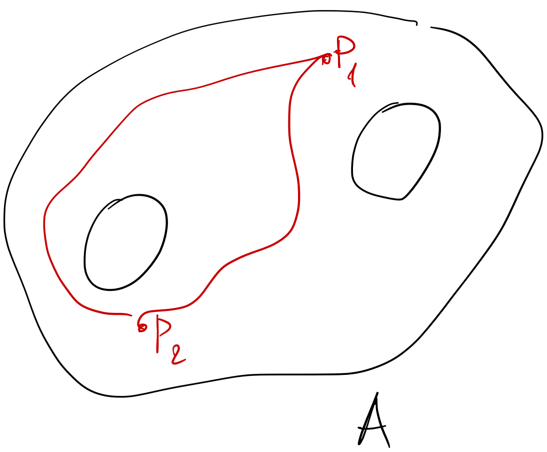


OSS su una curva che non allaccia il filo, come questa il lavoro è nullo.

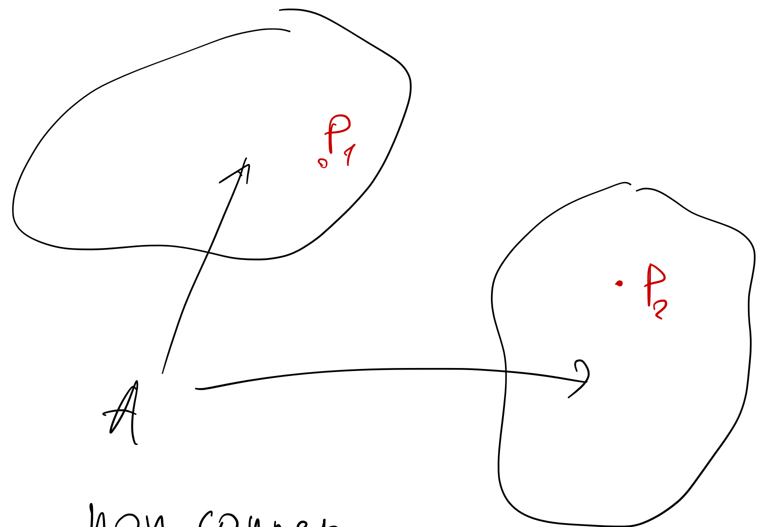
A aperto di $\mathbb{R}^2$ (di $\mathbb{R}^N$)

DEF

A si dice connesso (connesso per archi) se $\forall$ coppia di punti $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2) \in A$ esiste una curva regolare a tratti che li congiunge tutta contenuta in A.



connesso



non connesso

CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

DEF. Aperto connesso.

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI CONSERVATIVI (delle forme diff. esatte)

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo, A aperto connesso.
Allora le seguenti tre affermazioni sono tra loro equivalenti

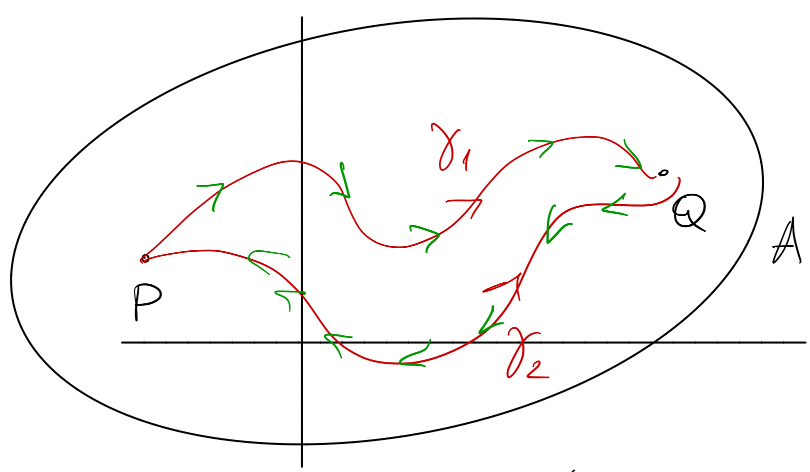
1) $\underline{F}$ conservativo in A;
2) Il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva chiusa vale zero;
3) Il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva regolare con sostegno in A dipende solo dagli estremi della curva.

DIM.

1) $\Rightarrow$ 2) già fatto

2) $\Rightarrow$ 3) Siano γ_1 e γ_2 due curve in A con gli stessi estremi

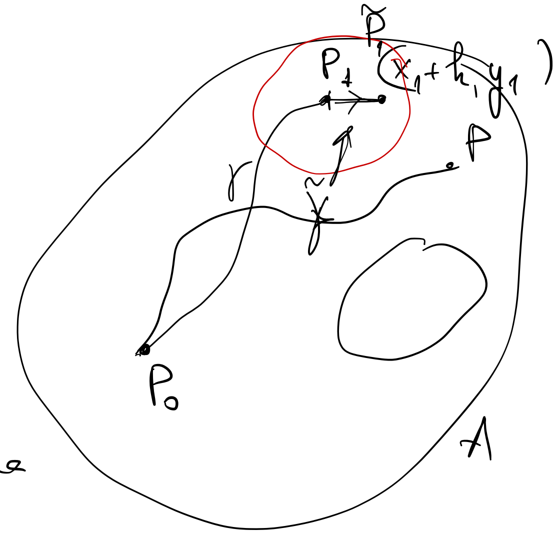
Tesi: $\displaystyle\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$



Considero la curva chiusa γ ottenuta "concatenando" γ_1 con γ_2^- (γ_2 percorsa in senso inverso)

$$0 = \int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds + \int_{\gamma_2^-} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds - \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds \quad \text{OK!}$$

$3) \Rightarrow 1)$. Fissiamo un pto $\underline{P}_0 = (x_0, y_0) \in A$.



$\forall\, \underline{P} = (x, y) \in A$, considero una qualsiasi curva γ regolare (a tratti) che congiunge $\underline{P}_0$ a $\underline{P}$

e definiamo $\quad V(\underline{P}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$

che ovviamente, per l'ipotesi 3), non dipende dalla scelta di γ.

Voglio provare che V è un potenziale di $\underline{F}$, cioè $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_1}$ e $\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_2$

Proviamo questa: Fissiamo un punto $P_1\,(x_1, y_1) \in A$.

Voglio provare che $\quad \dfrac{\partial V}{\partial x}(P_1) = F_1(P_1)$

Fissiamo un cerchietto centrato in P_1 tutto contenuto in A e lavoriamo lì dentro.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(P_1) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x_1 + h, y_1) - V(x_1, y_1)}{h} \quad \overset{?}{=} F_1(P_1)$$

Sia γ una curva che collega P_0 a P_1. $V(P_1) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$

Per calcolare $V(\overbrace{x_1 + h, y_1}^{\tilde{P}_1})$ considero la stessa curva γ di prima "+" un segmentino orizzontale.

$$V(\tilde{P}_1) = V(P_1) + \int_{\tilde{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds \qquad \tilde{\gamma} \begin{cases} x = t \\ y = y_1 \end{cases} \quad t \in [x_1, x_1 + h]$$

$$= V(P_1) + \int_{x_1}^{x_1 + h} F_1(t, y_1) \cdot 1\, dt$$

teorema della media

$$\frac{V(\tilde{P}_1) - V(P_1)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} F_1(t, y_1)\, dt = F_1(\xi, y_1)$$

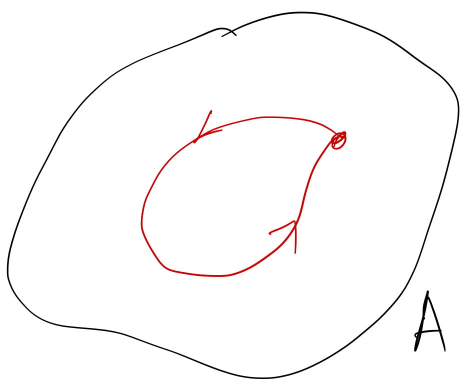
dove ξ compreso tra x_1 e $x_1 + h$.

Quando $h \to 0$, $\xi \to x_1$ e quindi (F_1 continua) $F_1(\xi, y_1) \to F_1(x_1, y_1)$

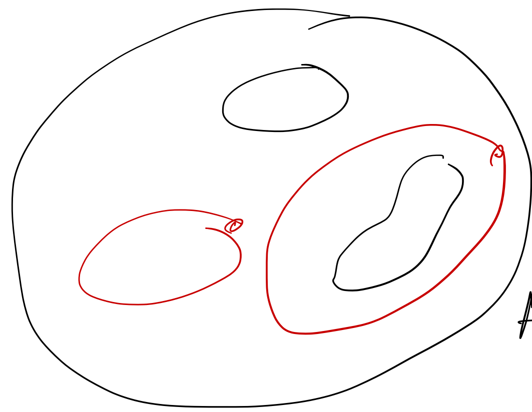
DEF. APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$ connesso si dice <u>semplicemente connesso</u> se ogni curva regolare chiusa e semplice in A può essere deformata con continuità fino a diventare un punto senza mai uscire da A.

(formalmente: ogni curva chiusa e semplice è omotopa ad un punto in A)



semplicemente connesso.



non semplicemente connesso

Esempio: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ è semplicemente connesso

$\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse } x\}$ non è semplicemente connesso perché non è connesso però è unione disgiunta di due aperti semplicemente connessi

$A_1 = \{(x,y) : y > 0\}$, $A_2 = \{(x,y) : y < 0\}$.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ $\underline{\underline{\text{è}}}$ semplicemente connesso.

$\mathbb{R}^3 \setminus$ asse x non è semplicemente connesso

TEOREMA Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale C^1 irrotazionale in A aperto semplicemente connesso. Allora $\underline{F}$ è conservativo.

Dim $\Rightarrow$ la vedremo dopo il teorema di Stokes.

ESERCIZIO Dire a priori se la forma differenziale

$$\omega = (3x^2y + xy^2 + 2)dx + (x^3 + x^2y - 1)dy$$

è esatta nel suo dominio, e in tal caso cercarne una primitiva.

OSS Questo è equivalente a chiedersi se il campo

$$\underline{F}(x,y) = (3x^2y + xy^2 + 2,\ x^3 + x^2y - 1) \text{ è conservativo.}$$

Il campo è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}^2$ è sempl. connesso, quindi dire ω esatta equivale a ω chiusa.

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2 + 2) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y - 1)$$

$$3x^2 + 2xy \overset{?}{=} 3x^2 + 2xy \qquad \text{OK!}$$

$\Rightarrow$ ω è esatta. Cerco una primitiva $V(x,y)$

Deve essere

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + xy^2 + 2$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = x^3 + x^2y - 1$$

Considero la 1ª per y fissato.

$$V(x,y) = \int (3x^2y + xy^2 + 2)\,dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x + g(y)$$

$$V(x,y) = \int (3x^2y + xy^2 + 2)\,dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x + g(y)$$

Ora imponiamo $\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} - 1$

$$\parallel$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = -1 \quad \Rightarrow g(y) = -y + c$$

$$V(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x - y + c$$

(<u>OSS</u> i potenziali sono sempre definiti a meno di una costante additiva).

ESERCIZIO. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(1-\frac{y}{x}\right)e^{y/x}\,dx + e^{y/x}\,dy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (5+\cos(t\pi),\ t^2+1)$ $\quad t\in[0,1]$.

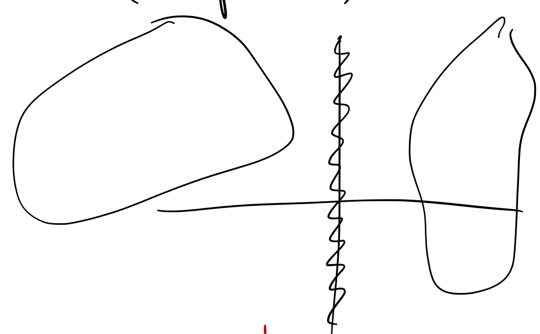
Il calcolo diretto è complicato. Verrebbe

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 dt \left[\left(1-\frac{t^2+1}{5+\cos(t\pi)}\right)e^{\frac{t^2+1}{5+\cos(t\pi)}}\left(-\pi\,\mathrm{sen}(t\pi)\right) + e^{\frac{t^2+1}{5+\cos(t\pi)}}\,2t\right]$$

(Complicato.)

vediamo se ω è esatta.

Vediamo se ω è chiusa



$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{y/x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y/x}\right)$$

$$\cancel{-\frac{1}{x}e^{y/x}} + e^{y/x}\left(\cancel{1}-\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = -\frac{y}{x^2}e^{y/x}$$

OK!

$\Rightarrow$ ω è chiusa

dom ω. $= \mathbb{R}^2 \setminus$ asse y $\quad$ non è sempl. connesso ma è unione disgiunta di due aperti sempl. connessi

$\Rightarrow$ ω è esatta in ciascuno di questi due aperti disgiunti

$\Rightarrow$ è esatta in tutto il dominio.

In particolare la curva γ è tutta contenuta nell'aperto sempl. connesso $\{(x,y): x>0\}$. Cerco un potenziale di ω su $\{x>0\}$.

Cerco $V(x,y)$ t.c. $\quad V_x = \left(1-\frac{y}{x}\right)e^{y/x}$

$$V_y = e^{y/x}$$

iniziamo da questa.

$$V(x,y) = \int e^{y/x}\, dy = x e^{y/x} + g(x)$$

Impongo $\qquad V_x(x,y) = \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{y}{x}}\right) e^{y/x}$

$$\cancel{e^{y/x}} \overset{''}{} + \cancel{x e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)} + g'(x)$$

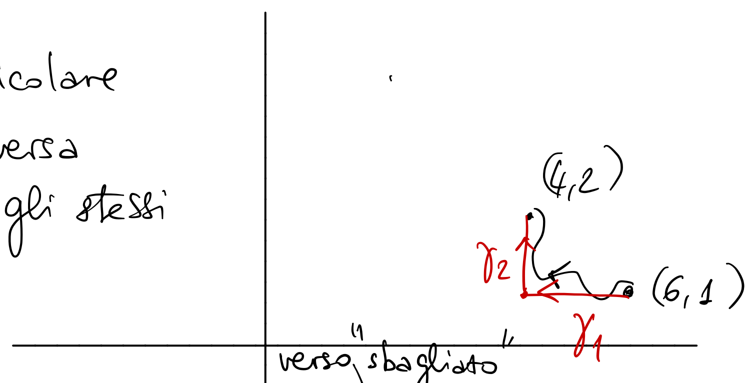
$$\Rightarrow \quad g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = c.$$

$$V(x,y) = x e^{y/x} + c.$$

La curva γ ha per estremi: $P_1(6,1)$, $P_2(4,2)$

$$\int_\gamma \omega = V(4,2) - V(6,1) = 4e^{1/2} - 6e^{1/6}$$

Un modo alternativo sarebbe calcolare l'integrale lungo una curva diversa e (si spera) più semplice avente gli stessi estremi.



$$\gamma_1^- \quad \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \qquad t \in [4,6]$$

$$\gamma_2 \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [1,2]$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega =$$

$$= -\int_4^6 dt \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{1/t} + \int_1^2 dt\, e^{t/4} =$$

"ovvio"

$$= -\cancel{\int_4^6 e^{1/t}\, dt} + \underbrace{\int_4^6 \frac{t}{t^2} e^{1/t}\, dt}_{\text{per parti}\; = \; -\, t e^{1/t}\Big|_4^6 + \cancel{\int_4^6 e^{1/t}\, dt}}$$

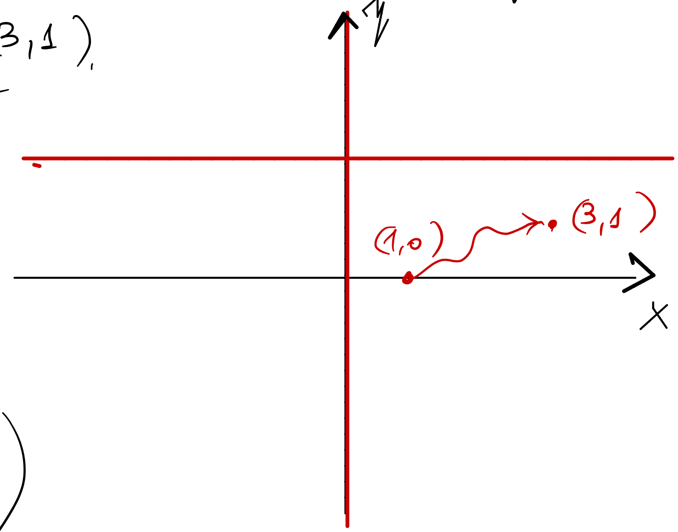
ESERCIZIO Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 - \alpha y}{x^2(y-2)} \, , \, \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

è irrotazionale. Per tale valore di α, dire se $\underline{F}$ è conservativo in ciascuno degli aperti connessi in cui è definito, e calcolare il lavoro compiuto da $\underline{F}$ per spostare un punto da $(1,0)$ a $(3,1)$.

Dominio di $\underline{F}$: $x \neq 0$, $y \neq 2$,

Il dom(F) è formato da 4 aperti disgiunti a 2 a 2 sempl. connessi.



$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-\alpha y}{x^2(y-2)}\right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x^2}{x(y-2)^2}\right)$$

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{-\alpha(\cancel{y}-2)-(x^2-\cancel{\alpha y})}{(y-2)^2} \qquad \frac{1}{(y-2)^2}\,\frac{-2x^2-(2-x^2)}{x^2}$$

$$\frac{2\alpha - x^2}{x^2(y-2)^2} \qquad \frac{-2-x^2}{x^2(y-2)^2}$$

Il campo è irrotazionale $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\alpha = -1}$

Per tale α, il campo è <u>conservativo</u> in ciascuno dei 4 aperti sempl. connessi (e disgiunti tra loro) in cui è definito.

Cerco un potenziale $\quad V_x(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2(y-2)}$; $V_y(x,y) = \dfrac{2-x^2}{x(y-2)^2}$

$\Downarrow$ parto da questo

$$V_x(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2(y-2)} \quad ; \quad V_y(x,y) = \frac{2-x^2}{x(y-2)^2}$$

$$V(x,y) = \int \frac{2-x^2}{x(y-2)^2}\,dy = -\frac{2-x^2}{x}\,\frac{1}{y-2} + g(x)$$

Imponiamo

$$V_x(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2(y-2)}$$

$$\parallel$$

$$-\frac{-2x^2-(2-x^2)}{(y-2)\,x^2} + g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{x^2}+y-\cancel{x^2}-2}{x^2(y-2)} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow V(x,y) = \frac{x^2-2}{x(y-2)} - \frac{1}{x} + c$$

$$\text{Lavoro} = V(3,1) - V(1,0) = \frac{9-2}{3(-1)} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$