ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046
A.A. 2025/26 - SCHEDA 10 - 20251204

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA - SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Calcolare l'area della superficie il cui sostegno è il grafico della funzione*

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{6} \qquad \textit{con} \qquad x \in D = \left\{ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \le 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ESERCIZIO 2. *Calcolare l'area della superficie* Σ*, porzione del luogo degli zeri dell'equazione* $\left\{x_1^2 + x_2^2 = 2x_1\right\}$ *delimitata dalle falde del cono* $\left\{x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\right\}$*.*

ESERCIZIO 3. *Calcolare l'area della superficie ottenuta dalla rotazione intorno all'asse* x_1 *della curva*

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left(e^t \sin(t), e^t \cos(t)\right) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

ESERCIZIO 4. *Calcolare il volume del solido* S *ottenuto ruotando intorno all'asse* x_3 *la figura contenuta nel piano* $\{x_2 = 0\}$ *definita come* $D = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2\}$*.*

ESERCIZIO 5. *Data la densità di massa* $\delta(x) = K_0(x_1^2 + x_2^2)$*, si trovi il baricentro del solido* $C = \{0 \le x_3 \le H, x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$*.*

ESERCIZIO 6. *Calcolare l'integrale* $\iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 dx_3$ *dove* $B = B(0, R) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R^2\}$*.*

ESERCIZIO 7. *Sia* $M = \{G(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *un sottoinsieme dello spazio tale che* $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $O \in M$ *e* $\partial_3 G(O) \neq 0$*. Allora si scriva*
i. l'equazione del piano tangente ad M *in* O*,*
ii. l'equazione del versore normale ad M *in* O*,*
iii. l'espressione della prima forma fondamentale di M *in* O*.*
Infine si spieghi perché M*, intorno ad* O*, è una superficie regolare.*

ESERCIZIO 8. *Calcolare l'area dell'insieme* D *delimitato dalla curva*

$$\gamma : \quad \left\{x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \left(\cos(t)\sin^2(t), \sin(t)\cos(t)\right), t \in [0, \pi/2]\right\}$$

ESERCIZIO 9. *Sia* $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 2, x_2 \ge 1 - x_1^2\}$*, si disegni* D *e se ne calcoli l'area.*

ESERCIZIO 10. *Calcolare il flusso del campo vettoriale* $F(x) = (x_1, x_2, x_3^2)$ *uscente dalla superficie* Σ *del cilindro* $x_1^2 + x_2^2 = 4$*, delimitato dai piani* $x_3 = -1$ *e* $x_3 = 2$*.*

ESERCIZIO 11. *Calcolare il flusso di* $F = (x_3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_3)$ *uscente dalla superficie che delimita il solido*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \leq 1 + x_1^2 + x_2^2\}$$

ESERCIZIO 12. *Sia* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *l'immagine della parametrizzazione*

$$\phi(w,z) = \left(w^2 - z^2, w^2, z^2\right) \qquad \textit{con } (w,z) \in [0,1]^2$$

i. si mostri che Σ *è una superficie regolare orientabile,*
ii. se ne calcoli l'area,
iii. si calcoli il flusso del campo $F(x) = (x_1, x_2, x_3)$ *attraverso la superficie.*

ESERCIZIO 13. *Assegnati la regione dello spazio* $D = \left\{1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 4\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *e il campo vettoriale* $F(x) = (x_1, x_2, 0)$*, si calcoli la quantità* $\Phi_{\partial D}(F)$.

ESERCIZIO 14. *Si calcoli il flusso* $\Phi_{\partial D}(F)$*, dove* $D = B(0, r)$ *e* $F = (a, b, c)$.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Calcolare l'area della superficie il cui sostegno è il grafico della funzione*

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{6} \qquad \textit{con} \qquad x \in D = \left\{\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

DISCUSSIONE. Verifichiamo che abbiamo a che fare con una superficie regolare introducendo la seguente parametrizzazione ricavata dall'espressione della funzione

$$\phi(u) = \left(u_1, u_2, \frac{u_1^2}{4} + \frac{u_2^2}{6}\right) \qquad u \in D$$

Tale parametrizzazione ha come componenti funzioni differenziabili (in realtà di classe C^∞) ed è iniettiva, visto che la restrizione alle prime due componenti è l'identità di $\mathbb{R}^2$, quindi verifichiamo la condizione sul rango della matrice jacobiana

$$\partial_1\phi(u) = \left(1, 0, \frac{u_1}{2}\right) \qquad \partial_2\phi(u) = \left(0, 1, \frac{u_2}{3}\right) \qquad \text{da cui} \qquad [\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi](u) = \left(-\frac{u_1}{2}, -\frac{u_2}{3}, 1\right)$$

quindi la superficie è regolare, visto che la terza componente del prodotto vettoriale è sempre diversa da 0. A questo punto ricordiamo che usiamo Σ per indicare il sostegno della superficie, cioè l'immagine $\phi(D)$ e che, per definizione, vale

$$m_2(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma = \iint_D \|[\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi](u)\|_2 du_1 du_2 = \iint_D \left[\frac{u_1^2}{4} + \frac{u_2^2}{9} + 1\right]^{1/2} du_1 du_2$$

Il calcolo dell'integrale doppi risulta più semplice ricorrendo al seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} u_1 = 2\rho\cos(\theta) \\ u_2 = 3\rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{di matrice jacobiana} \qquad \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -2\rho\sin(\theta) \\ 3\sin(\theta) & 3\rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Il cambio proposto trasforma l'integrale nel seguente modo

$$\begin{aligned} m_2(\Sigma) &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\rho^2 + 1\right)^{1/2} 6\rho d\theta\right] d\rho = 6\pi \int_0^1 \left[2\rho\left(\rho^2 + 1\right)^{1/2}\right] d\rho \\ &= 4\pi \left[\left(\rho^2 + 1\right)^{3/2}\right]_0^1 = 4\pi\left[2\sqrt{2} - 1\right] \end{aligned}$$

e, salvo sviste, abbiamo ottenuta l'area desiderata. ∎

ESERCIZIO 2. *Calcolare l'area della superficie Σ, porzione del luogo degli zeri dell'equazione $\left\{x_1^2 + x_2^2 = 2x_1\right\}$ delimitata dalle falde del cono $\left\{x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\right\}$.*

DISCUSSIONE. È (relativamente) facile accorgersi che il luogo degli zeri dell'equazione $\left\{x_1^2 + x_2^2 = 2x_1\right\}$ può essere riscritto come $\left\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\right\}$, questo rivela che si tratta di un cilindro con asse di simmetria la retta $\{x_1 - 1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ e avente intersezione con il piano $\{x_3 = 0\}$ la circonferenza centrata in $(1, 0)$ di raggio 1. Per contro il cono di equazione $\left\{x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\right\}$ ha asse di simmetria l'asse x_3, quindi la superficie Σ è una porzione di cilindro, delimitata dalle curve che sono intersezione tra cono e cilindro.
Per ottenere una parametrizzazione della superficie Σ possiamo procedere nel seguente modo: innanzitutto sfruttiamo il fatto di avere a che fare con una porzione di un cilindro, il che ci permette di scrivere la seguente parametrizzazione per la circonferenza (cioè la sezione del cilindro)

$$(x_1(\theta), x_2(\theta)) = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

A questo punto notiamo che

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 \qquad \text{da cui otteniamo} \qquad x_3 = \pm\sqrt{2x_1}$$

il precedente calcolo mostra che, per ogni punto della circonferenza, che è la sezione del cilindro, la superficie Σ è un segmento verticale con estremi dipendenti da x_1, cioè che

$$x_3 = \sqrt{2x_1}s = [1 + \cos(\theta)]^{1/2} s \qquad s \in [-1, 1]$$

Riassumendo abbiamo ottenuto la parametrizzazione

$$x(\theta, s) = (x_1(\theta, s), x_2(\theta, s), x_3(\theta, s)) = \left(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), [1 + \cos(\theta)]^{1/2} s\right) \qquad (\theta, s) \in K = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

tale parametrizzazione è iniettiva e composta di funzioni differenzialbili, quindi dobbiamo solo calcolare il rango della matrice jacobiana dell'applicazione tramite il seguente prodotto vettoriale

$$\partial_1 x(\theta, s) = \left(-\sin(\theta), \cos(\theta), -\frac{\sin(\theta)s}{2[1 + \cos(\theta)]^{1/2}}\right) \qquad \partial_2 x(\theta, s) = \left(0, 0, [1 + \cos(\theta)]^{1/2}\right)$$

$$[\partial_1 x \wedge \partial_2 x](\theta, s) = \left(\cos(\theta)[1 + \cos(\theta)]^{1/2}, \sin(\theta)[1 + \cos(\theta)]^{1/2}, 0\right)$$

Si noti che tale vettore non è definito per $\theta = \pi$ e per ogni s, quindi la parametrizzazione, così come scritta, non produce una superficie regolare nel senso della definizione data a lezione. Per fortuna possiamo risolvere facilmente utilizzando la parametrizzazione

$$x(\theta, s) = (x_1(\theta, s), x_2(\theta, s), x_3(\theta, s)) = \left(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), [1 + \cos(\theta)]^{1/2} s\right) \qquad (\theta, s) \in K = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$$

che sposta i valori incriminati sul bordo di K, rendendo la superficie regolare nell'interno di K! Per terminare calcoliamo l'area della superficie ricordando la definizione

$$A(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_K \|(\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(\theta, s)\|_2 d\theta ds = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos(\theta)] d\theta ds = 2\pi$$

e concludendo lo svolgimento. ∎

ESERCIZIO 3. *Calcolare l'area della superficie ottenuta dalla rotazione intorno all'asse x_1 della curva*

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left(e^t \sin(t), e^t \cos(t)\right) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

DISCUSSIONE. Le superfici di rotazione costituiscono una classe di superfici molto interessante, con proprietà peculiari, naturalmente per poter studiare la superficie è necessario ottenere una sua parametrizzazione. Dunque scriviamo che

$$x(t, s) = \left(e^t \sin(t), e^t \cos(t) \cos(s), e^t \cos(t) \sin(s)\right) \qquad (t, s) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$$

dove la parametrizzazione è stata ottenuta nel seguente modo: partendp dalla curva iniziale e pensandola nel piano $\{x_3 = 0\}$, la rotazione attorno all'asse x_1 fa sì che le componenti ortogonali x_2 e x_3 variano descrivendo una circonferenza, il parametro s è il parametro angolare della rotazione.
Le superfici costruite in questo modo sono sempre superfici regolari, a patto che la curva di partenza sia regolare e non abbia intersezioni con la retta intorno alla quale ruota. Verifichiamo la condizione di indipendenza lineare dei vettori tangenti

$$\begin{aligned}
&\partial_1 x(t,s) = e^t\,(\sin(t)+\cos(t), (\cos(t)-\sin(t))\cos(s), (\cos(t)-\sin(t))\sin(s))\\
&\partial_2 x(t,s) = e^t\,(0, -\cos(t)\sin(s), \cos(t)\cos(s))\\
&[\partial_1 x \wedge \partial_2 x](t,s) = e^{2t}\cos(t)\,((\cos(t)-\sin(t)), -(\cos(t)+\sin(t))\cos(s), -(\cos(t)+\sin(t))\sin(s))\\
&\|[\partial_1 x \wedge \partial_2 x](t,s)\|_2 = \sqrt{2}e^{2t}\cos(t)
\end{aligned}$$

con $(t,s) \in [0,\pi/2]\times[0,2\pi]$. Il calcolo dell'area della superficie si riduce al seguente integrale

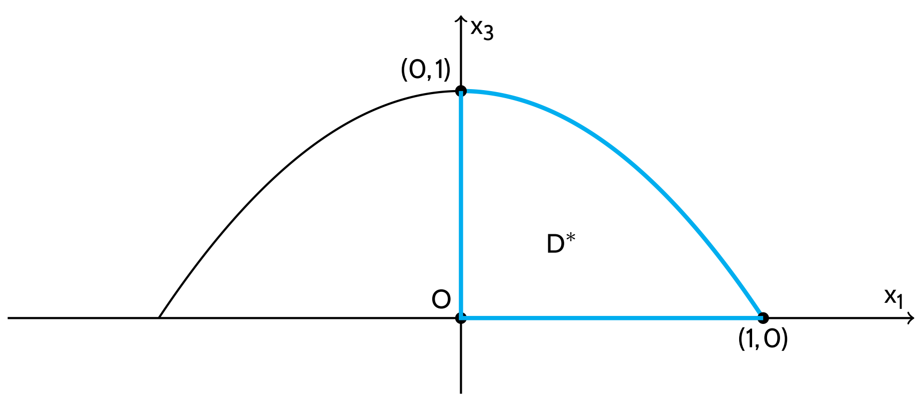
$$\begin{aligned}
A &= \iint_K \|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|_2 ds dt = \iint_K \sqrt{2}e^{2t}\cos(t) ds dt = \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{2}e^{2t}\cos(t)dt\right]\left[\int_0^{2\pi} ds\right]\\
&= 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{5}e^{2t}(2\cos(t)+\sin(t))\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi[e^{\pi}-2]
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti un paio di volte per ottenere un primitiva della funzione integranda.

■

Esercizio 4. *Calcolare il volume del solido* S *ottenuto ruotando intorno all'asse* x_3 *la figura contenuta nel piano* $\{x_2 = 0\}$ *definita come* $D = \{(x_1,x_3) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2\}$.

Discussione. La regione $D \subseteq \{x_2 = 0\}$ è la porzione del piano delimitata da un arco di parabola e dall'asse x_1, rappresentata nella seguente figura



Poiché la regione deve ruotare intorno all'asse x_3, per descrivere il solido, per motivi di parità possiamo limitarci a considerare la rotazione completa della zona avente il bordo azzurro, che possiamo descrivere come dominio normale nei seguenti due modi

$$D^* = \left\{0 \le x_1 \le 1; 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2\right\} = \left\{0 \le x_3 \le 1; 0 \le x_1 \le \sqrt{1-x_3}\right\}$$

Il calcolo del volume del solido S può essere compiuto (almeno) in quattro modi che andremo a analizzare uno per volta: quindi procederemo per fili, per sezioni, tramite le coordinate cilindriche e usando il teorema di Guldino.
Teorema di Guldino: questa strategia consiste nella semplice applicazione di un risultato (valido solo per solidi ottenuti tramite rotazione), l'enunciato afferme che il volume del solido è pari alla lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro b della sezione D^* moltiplicato per l'area della regione piana che ruota, in formule

$$m_3(S) = 2\pi b_1 m_2(D^*) = 2\pi \iint_{D^*} x_1 dx_1 dx_3$$

dove la seconda formula discende dal fatto che

$$b_j = \frac{\iint_{D^*} x_j dx_1 dx_3}{m_2(D^*)} \qquad j = 1, 3$$

Da quanto detto otteniamo che

$$m_3(S) = 2\pi \int_0^1 x_1 \left[\int_0^{1-x_1^2} dx_3 \right] dx_1 = 2\pi \int_0^1 x_1(1-x_1^2)dx_1 = 2\pi \left[\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Coordinate cilindriche: in questa tecnica impieghiamo un cambio di variabili molto comodo per lo studio di solidi di rotazione (che di fatto è alla base del teorema di Guldino), il solido ha la seguente descrizione, in termini di coordinate cartesiane

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2) \right\}$$

e ricordando che

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \text{e che} \qquad \det[J] = r$$

otteniamo la seguente descrizione del solido S, in qualità di dominio normale, nel nuovo sistema di riferimento $\tilde{S} = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 1 - r^2\}$ e l'integrale si trasforma nel seguente modo

$$m_3(S) = \iiint_S dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\tilde{S}} r dr d\theta dt = 2\pi \int_0^1 r \left[\int_0^{1-r^2} dt \right] dr = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)dr = \frac{\pi}{2}$$

ottenendo (come deve essere) lo stesso risultato ricavato tramite il teorema di Guldino.
Integrazione per sezioni: questa strategia sfrutta il seguente risultato valido per la misura di Lebesgue

$$m_3(S) = \int_{\mathbb{R}} m_2(S(t))dt \qquad \text{dove} \qquad S(t) = S \cap \{x_3 = t\}$$

questa tecnica di integrazione si rivela facile, almeno in questo caso, perché le sezioni S(t) sono dei cerchi e la loro misura si calcola rapidamente, infatti vale

$$m_2(S(t)) = m_2(S \cap \{x_3 = t\}) = m_2\left(\left\{x_1^2 + x_2^2 \leq (1-t)\right\}\right) = \pi(1-t) \qquad \text{solo per } t \in [0,1]$$

visto che $S(t) = \emptyset$ se $t \notin [0,1]$. Quindi otteniamo che

$$m_3(S) = \int_{\mathbb{R}} \pi(1-t)\chi_{[0,1]}(t)dt = \int_0^1 \pi(1-t)dt = \pi \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Integrazione per fili: quest'ultimo approccio è analogo al precedente, infatti possiamo scrivere che

$$m_3(S) = \iint_{\mathbb{R}^2} m_1(S(w))dw_1 dw_2 \qquad \text{dove} \qquad S(w) = S \cap \{x_1 = w_1, x_2 = w_2\}$$

Nel nostro caso vale

$$S(w) = \begin{cases} \left\{0 \leq x_3 \leq 1 - (w_1^2 + w_2^2)\right\} & w \in B \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad m_1(S(w)) = (1 - w_1^2 - w_2^2)\chi_B(w)$$

dove $B = B(O,1) = \{w \in \mathbb{R}^2 : w_1^2 + w_2^2 \leq 1\}$. Dalla precedente osservazione possiamo dedurre che

$$\begin{aligned}
m_3(S) &= \iint_{\mathbb{R}^2} m_1(S(w))dw_1dw_2 = \iint_B \left[1 - w_1^2 - w_2^2\right]dw_1dw_2 \\
&= 4\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-w_1^2}} \left[1 - w_1^2 - w_2^2\right]dw_2\right]dw_1 = 4\int_0^1 \left[w_2 - w_1^2w_2 - \frac{1}{3}w_2^3\right]_0^{\sqrt{1-w_1^2}} dw_1 \\
&= 4\int_0^1 \left[(1-w_1^2)\sqrt{1-w_1^2} - \frac{1}{3}(1-w_1^2)\sqrt{1-w_1^2}\right]dw_1 = \frac{8}{3}\int_0^1 (1-w_1^2)\sqrt{1-w_1^2}dw_1 \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2(\theta)\right)\cos^2(\theta)d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(1+\cos(4\theta))\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

nello svolgimento del calcolo abbiamo impiegato il cambio di variabile $w_1 = \sin(\theta)$.
Questa breve rassegna di tecniche di integrazione suggerisce che la strategia migliore è (quasi) sempre quella di sfruttare le eventuali simmetrie del dominio di integrazione, piuttosto che preoccuparsi della funzione integranda: il punto chiave è che il calcolo degli integrali multipli presenta due livelli di difficoltà, uno dovuto al calcolo di primitive (che è una difficoltà ineludibile), l'altro è dovuto alla complicazione della descrizione dell'insieme di integrazione come dominio normale e tale complicazione può essere semplificata solo trasformando il dominio in un parallelepipedo, cioè usando una strategia di integrazione che miri prima di tutto a semplificare l'espressione del dominio. ■

Esercizio 5. *Data la densità di massa* $\delta(x) = K_0(x_1^2 + x_2^2)$*, si trovi il baricentro del solido* $C = \{0 \leq x_3 \leq H, x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$.

Discussione. il baricentro di C, che è un cilindro avente cerchio di base di raggio R ed altezza H è il punto $b \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$b_j = \frac{1}{m}\iiint_C x_j\delta(x)dx_1dx_2dx_3 \qquad \text{per } j = 1,2,3 \qquad \text{e} \qquad m = \iiint_C \delta(x)dx_1dx_2dx_3$$

Prima di iniziare a svolgere calcoli osserviamo che le funzioni $x_1\delta(x)$ e $x_2\delta(x)$ sono dispari rispetto ai piani $\{x_1 = 0\}$ e $\{x_2 = 0\}$, quindi il loro integrale su C, che invece è simmetrico rispetto a tali piani, è nullo, per cui segue $b_1 = b_2 = 0$. Per il resto, grazie alle coordinate cilindriche, abbiamo che

$$\begin{aligned}
m &= K_0\iiint_C (x_1^2 + x_2^2)dx_1dx_2dx_3 = K_0\iiint_{\tilde{C}} r^2 \cdot rdrdtd\theta \\
&= K_0\int_0^{2\pi}\left[\int_0^H\left[\int_0^R r^3dr\right]dt\right]d\theta = K_0 \cdot 2\pi \cdot H \cdot \frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2}\pi K_0HR^4
\end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned}
\iint_C x_3\delta(x_1,x_2)dx_1dx_2dx_3 &= K_0\iiint_C x_3(x_1^2 + x_2^2)dx_1dx_2dx_3 = K_0\iiint_{\tilde{C}} tr^2 \cdot rdrdtd\theta \\
&= K_0\int_0^{2\pi}\left[\int_0^H t\left[\int_0^R r^3dr\right]dt\right]d\theta = K_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}H^2 \cdot \frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{4}\pi K_0H^2R^4
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo che il baricentro è il punto $b = \left(0, 0, \frac{1}{2}H\right)$. ■

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale* $\iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right]dx_1dx_2dx_3$ *dove* $B = B(O,R) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$.

Discussione. Per il calcolo dell'integrale ricorriamo alle coordinate sferiche, visto che il dominio di integrazione B ossiede una evidente simmetria sferica e, quasi sempre, il cambio di variabile che più semplifica il calcolo degli integrali multipli è suggerito dalla geometria del dominio di integrazione più che dall'espressione della funzione integranda. Allora ricordando che

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ x_2 = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x_3 = r\cos(\phi) \end{cases} \qquad (r,\phi,\theta) \in K = [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\tilde{B}} r^2 \sin^2(\phi) \cdot r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \int_0^R r^4 dr \\ &= 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \sin(\phi)(1-\cos^2(\phi)) d\phi = \frac{8}{15}\pi R^5 \end{aligned}$$

e l'esercizio è portato a compimento. ■

Esercizio 7. *Sia* $M = \{G(x_1,x_2,x_3) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *un sottoinsieme dello spazio tale che* $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $O \in M$ *e* $\partial_3 G(O) \neq 0$. *Allora si scriva*
i. l'equazione del piano tangente ad M *in* O,
ii. l'equazione del versore normale ad M *in* O,
iii. l'espressione della prima forma fondamentale di M *in* O.
Infine si spieghi perché M*, intorno ad* O*, è una superficie regolare.*

Discussione. i. & ii. Le ipotesi contenute nel testo ci permettono di applicare il teorema delle funzioni implicite per rispondere alle richieste dell'esercizio. Dunque osserviamo subito che il teorema di Dini assicura l'esistenza di una funzione $g \in C^\infty(B,\mathbb{R})$, con $B = B(O,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$, tale che

i. $g(O) = 0$
ii. $G(x_1,x_2,g(x_1,x_2)) = 0 \quad$ per ogni $\quad (x_1,x_2) \in B$
iii. se $\quad \|x - O\|_2 \leq \delta \quad$ e $\quad G(x) = 0 \quad$ allora $\quad x_3 = g(x_1,x_2)$

inoltre sappiamo che

$$\nabla g(x_1,x_2) = -\frac{1}{\partial_3 G(x_1,x_2,g(x_1,x_2))} \left(\partial_1 G(x_1,x_2,g(x_1,x_2)), \partial_2 G(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\right)$$

quindi, in particolare, vale che

$$\nabla g(0,0) = -\frac{(\partial_1 G(O), \partial_2 G(O))}{\partial_3 G(O)}$$

questo ci permette di ottenere l'equazione del piano tangente ad M in O, come l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $O = (0,0,g(0,0))$, che è

$$x_3 = g(0,0) + \nabla g(0,0) \cdot (x_1,x_2) = -\frac{\partial_1 G(O) x_1 + \partial_2 G(O) x_2}{\partial_3 G(O)}$$

che possiamo riscrivere, più elegantemente, nel seguente modo

$$\partial_1 G(O) x_1 + \partial_2 G(O) x_2 + \partial_3 G(O) x_3 = \nabla G(O) \cdot x = 0$$

Dalla precedente espressione segue che il versore normale al piano tangente, e quindi ad M, è $\dfrac{\nabla G(O)}{\|\nabla G(O)\|_2}$.
iii. M è, nei dintorni di O, una superficie regolare in quanto è il grafico di una funzione di classe C^1, come prova il teorema della funzione implicita, e il teorema in questione suggerisce anche una buona parametrizzazione della superficie

$$x(u) = (u_1,u_2,g(u_1,u_2)) \qquad \text{con} \quad u = (u_1,u_2) \in B$$

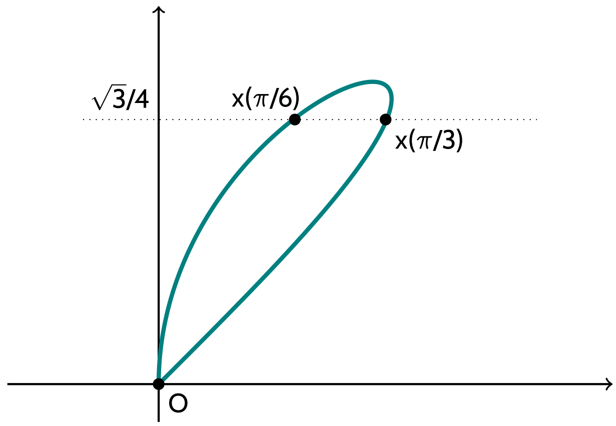


FIGURA 1. Curva dell'esercizio **??**.

inoltre vale

$$
\begin{aligned}
&\partial_1 x(u) = (1, 0, \partial_1 g(u_1, u_2)) = \left(1, 0, -\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right)\\
&\partial_2 x(u) = (0, 1, \partial_2 g(u_1, u_2)) = \left(0, 1, -\frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right)\\
&\partial_1 x \wedge \partial_2 x = \left(\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}, \frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}, 1\right)
\end{aligned}
$$

a questo punto è facile ricavare i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie, che sono

$$
\begin{aligned}
&E = \partial_1 x \cdot \partial_1 x = 1 + \left[\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right]^2\\
&F = \partial_1 x \cdot \partial_2 x = \frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \cdot \partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{|\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))|^2}\\
&G = \partial_2 x \cdot \partial_2 x = 1 + \left[\frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}\right]^2
\end{aligned}
$$

il che mette fine allo svolgimento. ■

ESERCIZIO 8. *Calcolare l'area dell'insieme* D *delimitato dalla curva*

$$
\gamma : \quad \left\{x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \left(\cos(t)\sin^2(t), \sin(t)\cos(t)\right), t \in [0, \pi/2]\right\}
$$

DISCUSSIONE. La curva è rappresentata in figura **??** e la parametrizzazione assegnata percorre la curva in verso orario (quindi negativo), infatti x(t) percorre il sostegno di γ in verso orario dato che

$$
x(0) = (0, 0) \qquad x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \qquad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)
$$

Per il calcolo dell'area, come in altri esercizi, usiamo le formule di Gauss-Green, cioè

$$
A(D) = \int_{\partial D^+} x_1 dx_2 = -\int_{\partial D^+} x_2 dx_1 = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} x_1 dx_2 - x_2 dx_1
$$

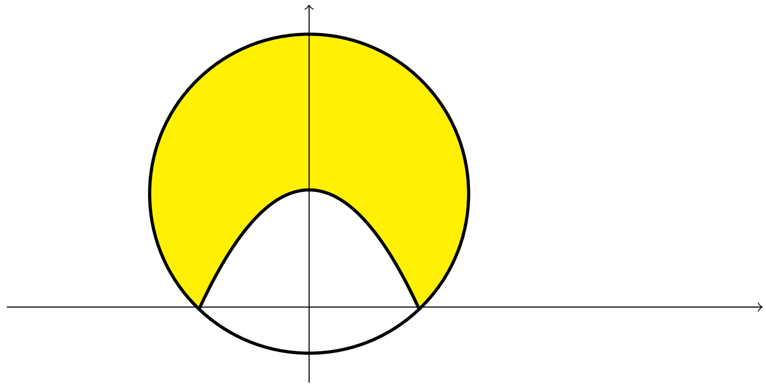
in questo caso utilizziamo la prima formula ottenendo

$$
\begin{aligned}
A(D) &= -\int_{\partial D^+} x_1 dx_2 = -\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)dt\\
&= -\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\left(1 - 2\sin^2(t)\right)\cos(t)dt = -\int_0^1 u^2(1 - 2u^2)du = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che nella risoluzione degli integrali abbiamo impiegato la sostituzione u = sin(t). ■

Esercizio 9. *Sia* $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 2, x_2 \geq 1 - x_1^2\}$*, si disegni* D *e se ne calcoli l'area usando le formule di Gauss-Green.*

Discussione. L'insieme D è la porzione del cerchio di raggio $\sqrt{2}$ e centro $(0, 1)$ che si trova al di sopra della parabola di equazione $x_2 = 1 - x_1^2$, come suggerito dal disegno



Il bordo di D è costituito dall'unione di due curve: un arco di parabola γ_1 e un arco di circonferenza γ_2, le cui parametrizzazioni sono

$$\gamma_1 = \left\{x(t) = (t, 1 - t^2) : t \in [-1, 1]\right\} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 = \left\{y(\theta) = \left(\sqrt{2}\cos(\theta), 1 + \sqrt{2}\sin(\theta)\right) : \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right\}$$

da cui

$$x'(t) = (1, -2t) \qquad \text{e} \qquad y'(\theta) = \left(-\sqrt{2}\sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta)\right)$$

Applicando Gauss-Green abbiamo che

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_{\partial D^+} x_1 dx_2 = \int_{\gamma_1} x_1 dx_2 + \int_{\gamma_2} x_1 dx_2 = -2\int_{-1}^{1} t^2 dt + 2\int_{-\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2(\theta) d\theta \\ &= -\frac{4}{3} + \Big[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\Big]_{-\pi/4}^{5\pi/4} = -\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il calcolo dell'area tramite un integrale doppio si sarebbe rivelato più impegnativo del precedente, il lettore è invitato a sincerarsi di questa affermazione... ∎

Esercizio 10. *Calcolare il flusso del campo vettoriale* $F(x) = (x_1, x_2, x_3^2)$ *uscente dalla superficie* Σ *del cilindro* $x_1^2 + x_2^2 = 4$*, delimitato dai piani* $x_3 = -1$ *e* $x_3 = 2$*.*

Discussione. Σ è la superficie che delimita il solido

$$E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_3 \leq 2, x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$

e per il teorema della divergenza, possiamo scrivere che

$$\iint_\Sigma F \cdot n d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}(F)(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_E \nabla \cdot F(x) dx_1 dx_2 dx_3$$

Dato che

$$\operatorname{div}(F)(x) = \partial_1 F_1(x) + \partial_2 F_2(x) + \partial_3 F_3(x) = 1 + 1 + 2x_3 = 2(1 + x_3)$$

il calcolo del flusso può essere ricondotto al calcolo del seguente integrale triplo

$$2\iiint_E (1 + x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

Applichiamo la strategia d'integrazione per strati dato che possiamo descrivere il cilindro come segue

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_3 \leq 2, (x_1, x_2) \in D\} \qquad \text{con } D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$

per cui otteniamo che

$$2\iiint_E (1+x_3)dx_1dx_2dx_3 = 2\int_{-1}^{2}(1+x_3)m_2(D)dx_3 = 8\pi\int_{-1}^{2}(1+x_3)dz = 8\pi\left[x_3+\frac{1}{2}x_3^2\right]_{-1}^{2} = 36\pi$$

Si poteva anche calcolare il flusso usando direttamente la sua definizione come integrale di superficie, per completezza seguiamo anche questa strada e iniziamo notando che Σ è composta dall'unione di tre superfici regolari: la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma_1 : \quad \left\{x_1^2+x_2^2 = 4, -1 \le x_3 \le 2\right\}$$

la base del cilindro

$$\Sigma_2 : \quad \left\{x_1^2+x_2^2 \le 4, x_3 = -1\right\}$$

il coperchio (o tappo) del cilindro

$$\Sigma_3 : \quad \left\{x_1^2+x_2^2 \le 4, x_3 = 1\right\}$$

Calcoliamo separatamente il flusso attraverso le tre parti regolari che compongono la superficie. Una possibile parametrizzazione per Σ_1 è

$$x(u) = (2\cos(u_1), 2\sin(u_1), u_2) \qquad (u_1,u_2) \in D = [0,2\pi]\times[-1,2]$$

La normale uscente indotta dalla parametrizzazione su Σ_1 risulta $n(u) = (\cos(u_1), \sin(u_1), 0)$, quindi

$$F\cdot n = 2 \qquad \text{e vale} \qquad d\sigma = 2du_1du_2$$

per cui possiamo scrivere che

$$\iint_{\Sigma_1}[F\cdot n]d\sigma = 4\iint_D du_1du_2 = 16\pi = 4\int_0^{2\pi}\left[\int_{-1}^{2}du_1\right]du_1 = 24\pi$$

Il fondo Σ_2 può essere parametrizzato con le seguenti equazioni

$$x(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), -1) \qquad \text{con } (r,\theta)\in D = [0,2]\times[0,2\pi]$$

La normale uscente è $n = (0,0,-1) = -e_3$, quindi

$$\iint_{\Sigma_2}[F\cdot n]\,d\sigma \iint_{\Sigma_2} -x_3^2 d\sigma = -\iint_D r dr d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 r dr\right]d\theta = -2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = -4\pi$$

Il tappo Σ_3 ha, per esempio, equazioni parametriche analoghe a quelle di Σ_2, per cui possiamo scrivere

$$x(r,\theta) = \{r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2) \qquad \text{con } (r,\theta)\in D = [0,2]\times[0,2\pi]$$

la normale uscente è $n = (0,0,1) = e_3$e quindi segue

$$\iint_{\Sigma_3}[F\cdot n]d\sigma = 4\iint_D r dr d\theta = 16\pi$$

Si ottiene quindi

$$\iint_{\Sigma}[F\cdot n]d\sigma = \iint_{\Sigma_1}[F\cdot n]d\sigma + \iint_{\Sigma_2}[F\cdot n]d\sigma + \iint_{\Sigma_3}[F\cdot n]d\sigma = 24\pi - 4\pi + 16\pi = 36\pi$$

Ovviamente i due risultati coincidono, come suggerisce la teoria. ■

ESERCIZIO 11. *Calcolare il flusso di* $F = (x_3, x_1^2x_2, x_2^2x_3)$ *uscente dalla superficie che delimita il solido*

$$E = \{x\in\mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le x_3 \le 1 + x_1^2 + x_2^2\}$$

Discussione. Cerchiamo di capire come è fatto E. La superficie $x_3 = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ è una falda di cono con vertice nell'origine e asse x_3 come asse di rotazione, mentre $x_3 = 1 + x_1^2 + x_2^2$ è un paraboloide con vertice in $(0,0,1)$ e x_3 asse di simmetria. L'intersezione tra le due superfici è il disco $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ contenuto nel piano $x_3 = 2$.
Per il teorema della divergenza il flusso richiesto è dato dall'integrale

$$\iiint_E \operatorname{div}(F)(x)dx = \iiint_E \left(x_1^2 + x_2^2\right)dx$$

scrivendo E nella forma

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \leq 1 + x_1^2 + x_2^2, (x_1, x_2) \in D\}$$

dove $D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e usando la formula di integrazione per fili otteniamo

$$\iiint_E (x_1^2 + x_2^2)dx_1dx_2dx_3 = \iint_D (x_1^2 + x_2^2)\int_{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{1+x_1^2+x_2^2} dx_3 = \iint_D (x_1^2 + x_2^2)\left(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)dx_1dx_2$$

Introducendo un sistema di coordinate polari nel piano (x_1, x_2) si trova che

$$\iiint_E (x_1^2 + x_2^2)dx = 2\pi \int_0^1 \rho^3(1 + \rho^2 - 2\rho)d\rho = \frac{\pi}{30}$$

È facile intuire che calcolare il flusso tramite integrali di superficie risulta un po' più impegnativo. ■

Esercizio 12. *Sia* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *l'immagine della parametrizzazione*

$$\phi(w, z) = \left(w^2 - z^2, w^2, z^2\right) \qquad \textit{con } (w, z) \in [0, 1]^2$$

i. si mostri che Σ *è una superficie regolare orientabile,*
ii. se ne calcoli l'area,
iii. si calcoli il flusso del campo $F(x) = (x_1, x_2, x_3)$ *attraverso la superficie.*

Discussione. i. L'applicazione ϕ ha tutte le componenti polinomiali nelle variabili w e z, quindi di classe C^∞, l'iniettività segue facilmente notando che se

$$\phi(w, z) = \left(w^2 - z^2, w^2, z^2\right) = \left(u^2 - v^2, u^2, v^2\right) = \phi(u, v)$$

le ultime due relazioni implicano che $w^2 = u^2$ e $z^2 = v^2$, e siccome l'applicazione $t \mapsto t^2$ è iniettiva e suriettiva su $[0, 1]$ l'affermazione è provata. Infine notiamo che

$$\partial_1\phi(w, z) = 2w(1, 1, 0) \qquad \partial_2\phi(w, z) = 2z(-1, 0, 1)$$

e che

$$\partial_1\phi(w, z) \wedge \partial_2\phi(w, z) = 4wz(1, -1, 1) \qquad n(w, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

il che implica che il campo di versori normali (essendo costante) è prolungabile fin sul bordo della superficie. Si noti che il versore normale è costante, questo perché Σ è una porzione del piano di equazione cartesiana $\{x_1 = x_2 - x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
ii. Per calcolare l'area della superficie ricorriamo alla definizione, cioè al seguente integrale

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_\Sigma d\sigma = \int_{[0,1]^2} |\partial_1\phi(w, z) \wedge \partial_2\phi(w, z)|dwdz = \int_{[0,1]^2} 4\sqrt{3}wzdwdz \\ &= 4\sqrt{3}\int_{[0,1]} wdw \int_{[0,1]} zdz = \sqrt{3} \end{aligned}$$

iii. Anche questo quesito richiede il calcolo di un integrale, ricordando la definizione introdotta a lezione abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(F) &= \int_\Sigma (F \cdot n)d\sigma = \int_{[0,1]^2} \left(w^2 - z^2, w^2, z^2\right) \cdot (4wz, -4wz, 4wz)dwdz = 8\int_{[0,1]^2} w^3zdwdz \\ &= 8\int_{[0,1]} w^3dw \int_{[0,1]} zdz = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

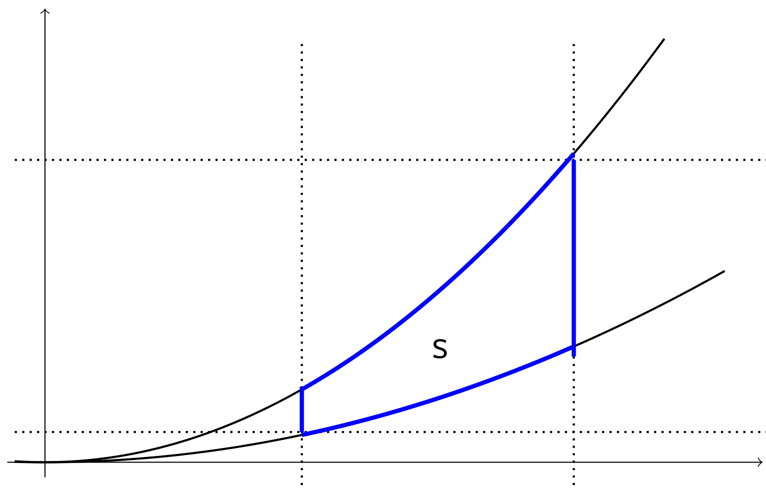
Si noti che abbiamo tacitamente assunto che la normale alla superficie indotta dalla parametrizzazione stabilisca il verso positivo di attraversamento di Σ per il flusso. ■

ESERCIZIO 13. *Assegnati la regione dello spazio* $D = \left\{1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 4\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *e il campo vettoriale* $F(x) = (x_1, x_2, 0)$*, si calcoli la quantità* $\Phi_{\partial D}(F)$.

DISCUSSIONE. Il flusso del campo vettoriale F attraverso la frontiera del dominio D (superficie regolare a tratti composta da più superfici) può essere calcolato, grazie al teorema della divergenza, aggirando il calcolo di più integrali superficiali e riducendo il tutto ad un unico integrale di volume, infatti vale

$$\Phi_{\partial D}(F) = \int_{\partial D} (F \cdot n) d\sigma = \int_D \operatorname{div}(F)(x) dx = \int_D 2 dx_1 dx_2 dx_3 = 2 m_3(D)$$

Osserviamo che il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ è un solido avente simmetria assiale e la sua sezione S ha il seguente profilo



dove $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ è la distanza dall'asse x_3 di rotazione. Quindi possiamo calcolare la misura di D grazie alle coordinate cilindriche nel seguente modo

$$m_3(D) = \int_D dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\tilde{D}} \rho d\rho d\theta dz = \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_{\rho^2}^4 \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] dz\right] \rho d\rho = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2) \rho d\rho$$
$$= 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\pi$$

così da concludere che $\Phi_{\partial D}(F) = 5\pi$. ■

ESERCIZIO 14. *Si calcoli il flusso* $\Phi_{\partial D}(F)$*, dove* $D = B(0, r)$ *e* $F = (a, b, c)$.

DISCUSSIONE. L'esercizio non presenta particolari difficoltà, il calcolo del flusso in questione (cioè dell'integrale di superficie) può essere aggirato tramite il teorema della divergenza, visto che il campo vettoriale è sufficientemente regolare e la superficie è regolare ed è il bordo di un dominio. In particolare notiamo che

$$\operatorname{div}(F) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \partial_1 a + \partial_2 b + \partial_3 c = 0$$

da cui segue che

$$\Phi_{\partial D}(F) = \int_{\partial D} [F \cdot n] d\sigma = \int_D \operatorname{div}(F)(x) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

si noti che ogni campo vettoriale costante ha divergenza nulla, quindi il risultato ottenuto resta vero per ogni dominio D per cui vale il teorema della divergenza! ■