- Lunedì mattina 14/12 niente ricevimento studenti
- Oggi l'esercitazione facoltativa si tiene alle 14:30 in Aula Majorana (Prof. Montefusco).

Integrali curvilinei di una funzione scalare (Integrali curvilinei di 1^a specie)

$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva C^1

$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_N(t))$

Sostegno di $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}([a,b]) = \mathrm{Im}(\underline{\gamma}) =$

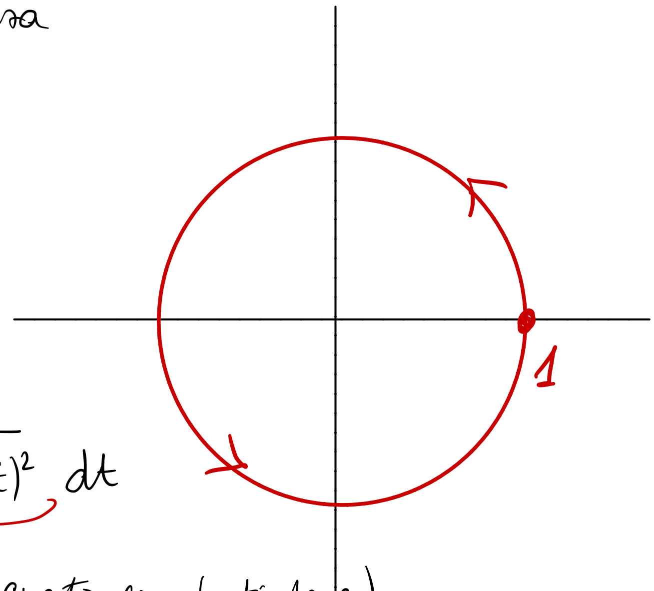
$f : \mathrm{Im}(\underline{\gamma}) \longmapsto \mathbb{R}$ funzione scalare di N variabili reali <u>continua</u>

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) \, \|\underline{\gamma}'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_N(t)) \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_N'(t))^2} \, dt$$

ESEMPIO Calcolare $\int_\gamma x^2y^2\,ds$, dove γ è la circonferenza unitaria.

Non viene specificato il verso di percorrenza, in quanto l'integrale non dipende dal verso di percorrenza



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f(x,y) = x^2y^2$$

$$\int_\gamma x^2y^2\,ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\text{sen}^2 t \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}_{=\,1 \text{ (in questo caso particolare)}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\text{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cancel{\cos 4t}}{2}\,dt = \frac{1}{8}\,2\pi = \frac{\pi}{4}$$

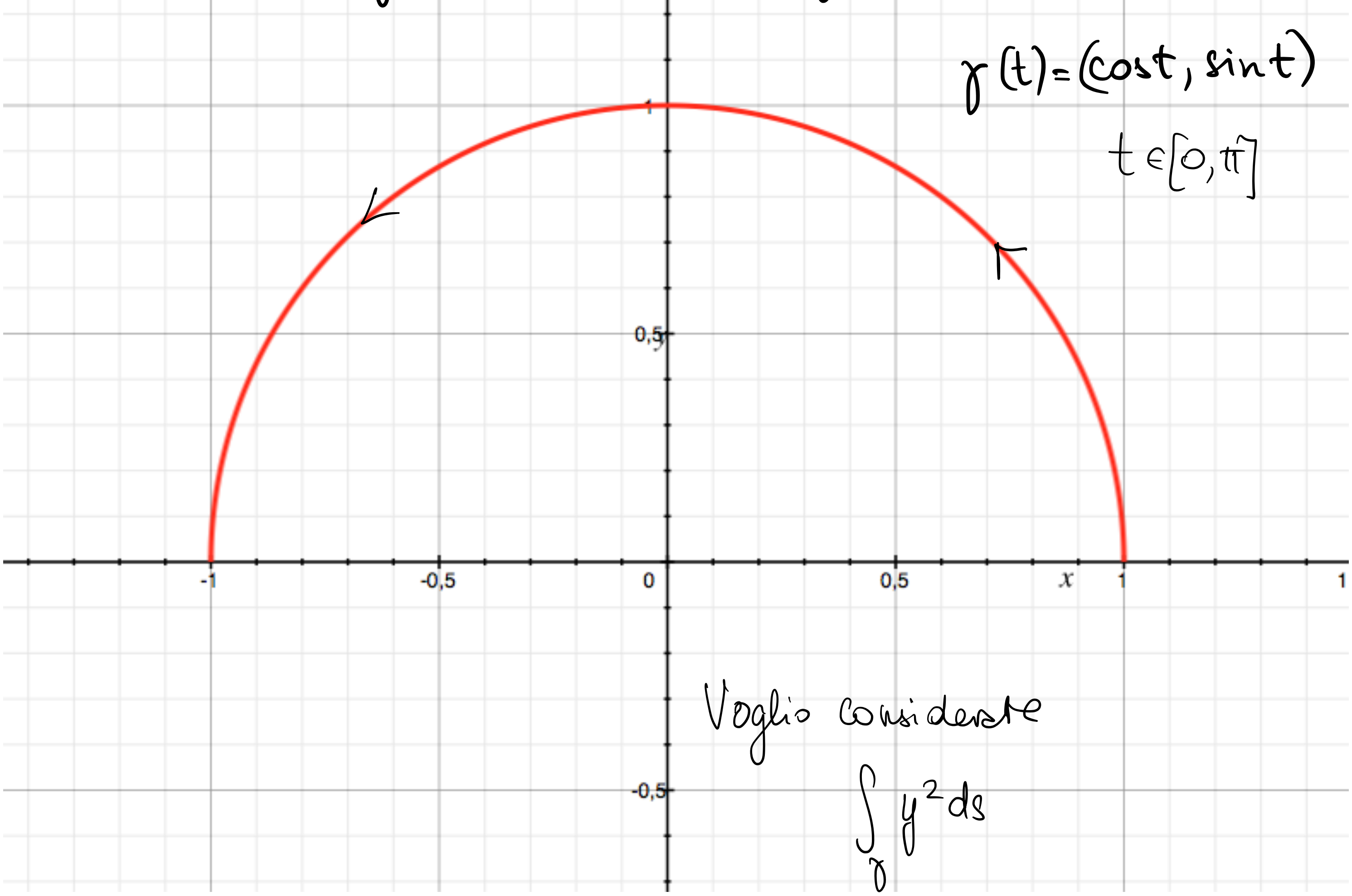
Interpretazione "fisica" dell' integrale curvilineo

Si interpreta la curva come un filo metallico.

Si interpreta f come la densità lineare $\left(\frac{g}{cm}\right)$ del filo

$\int_\gamma f \, ds$ è la massa totale del filo.

Interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo

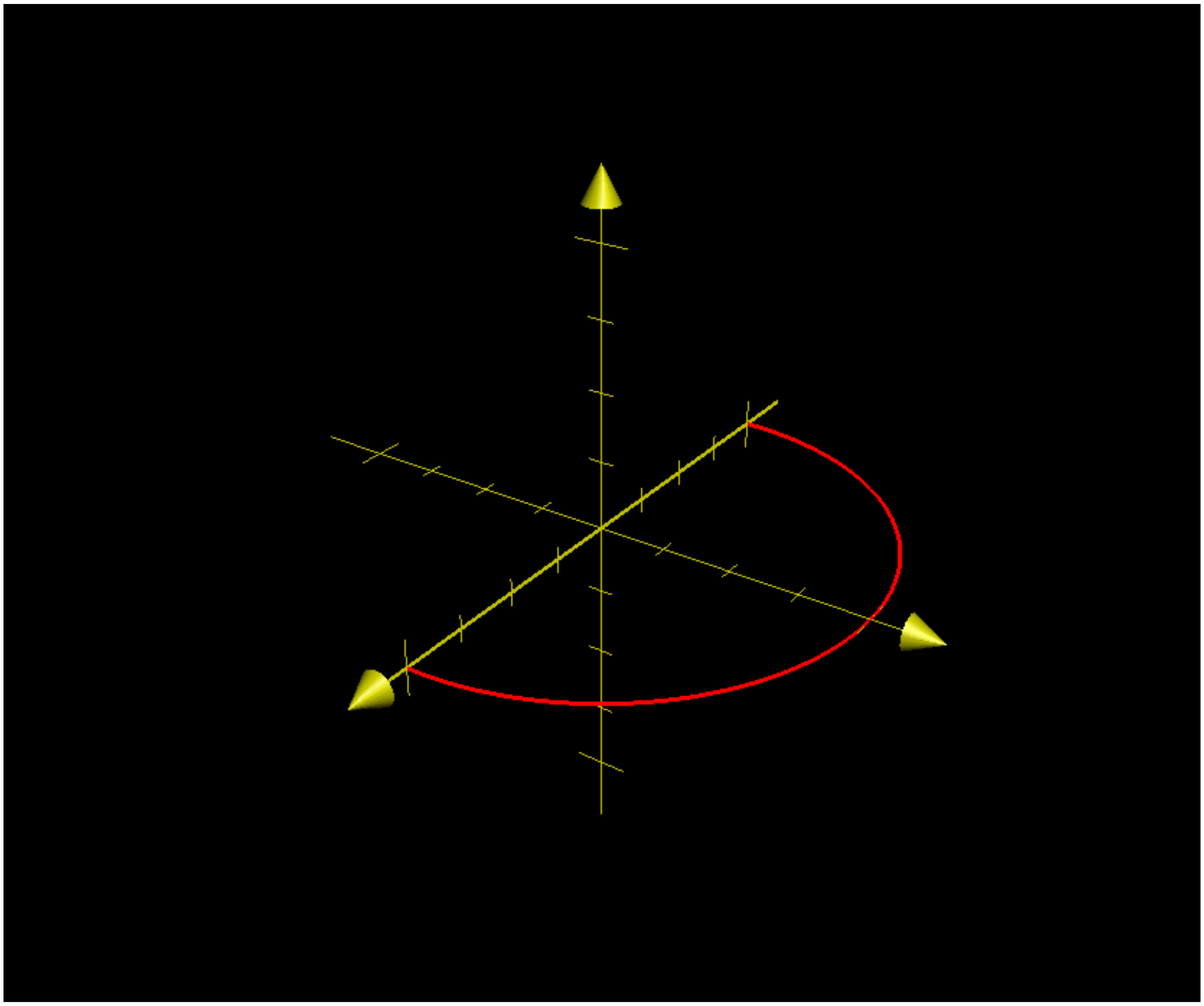


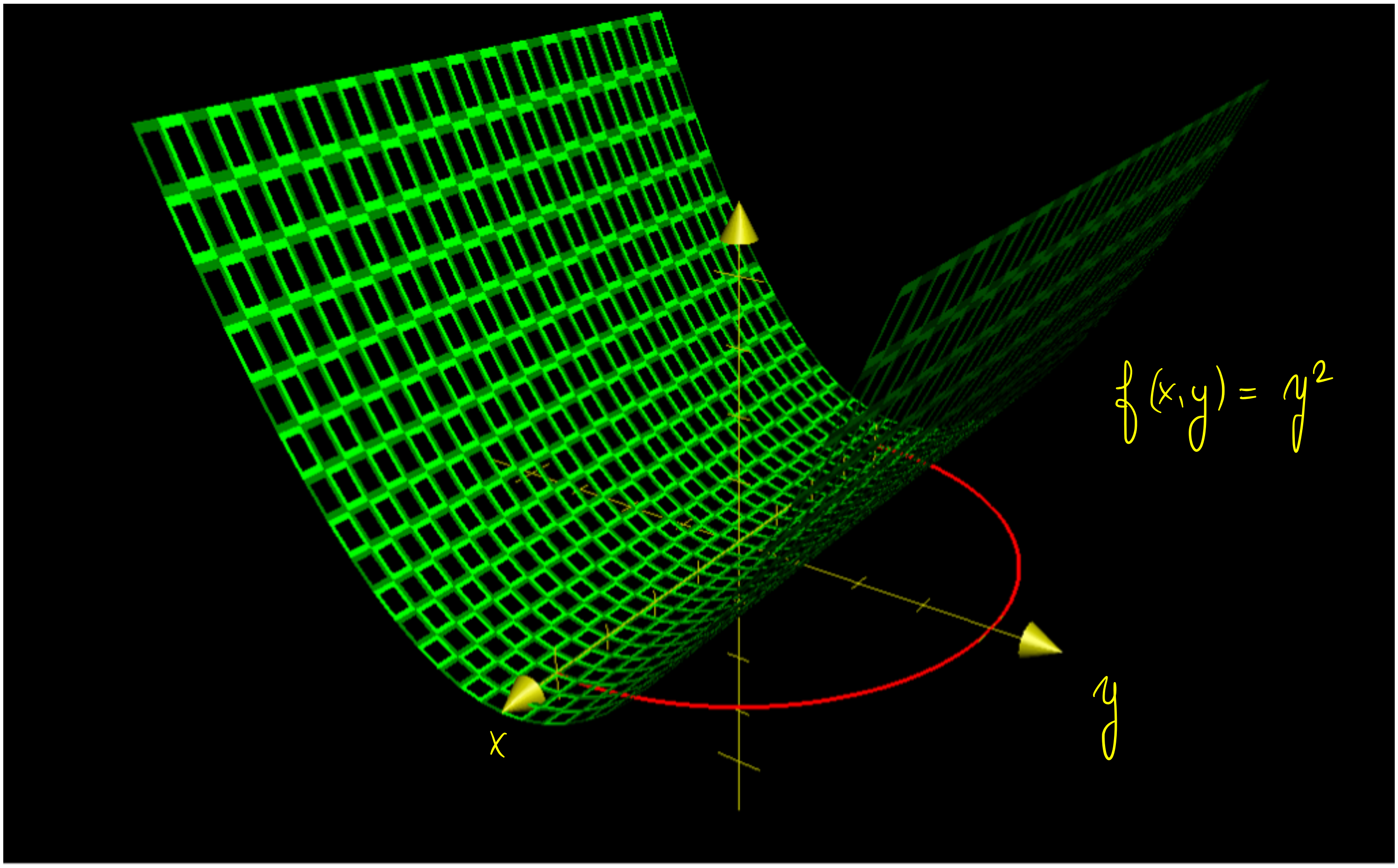
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

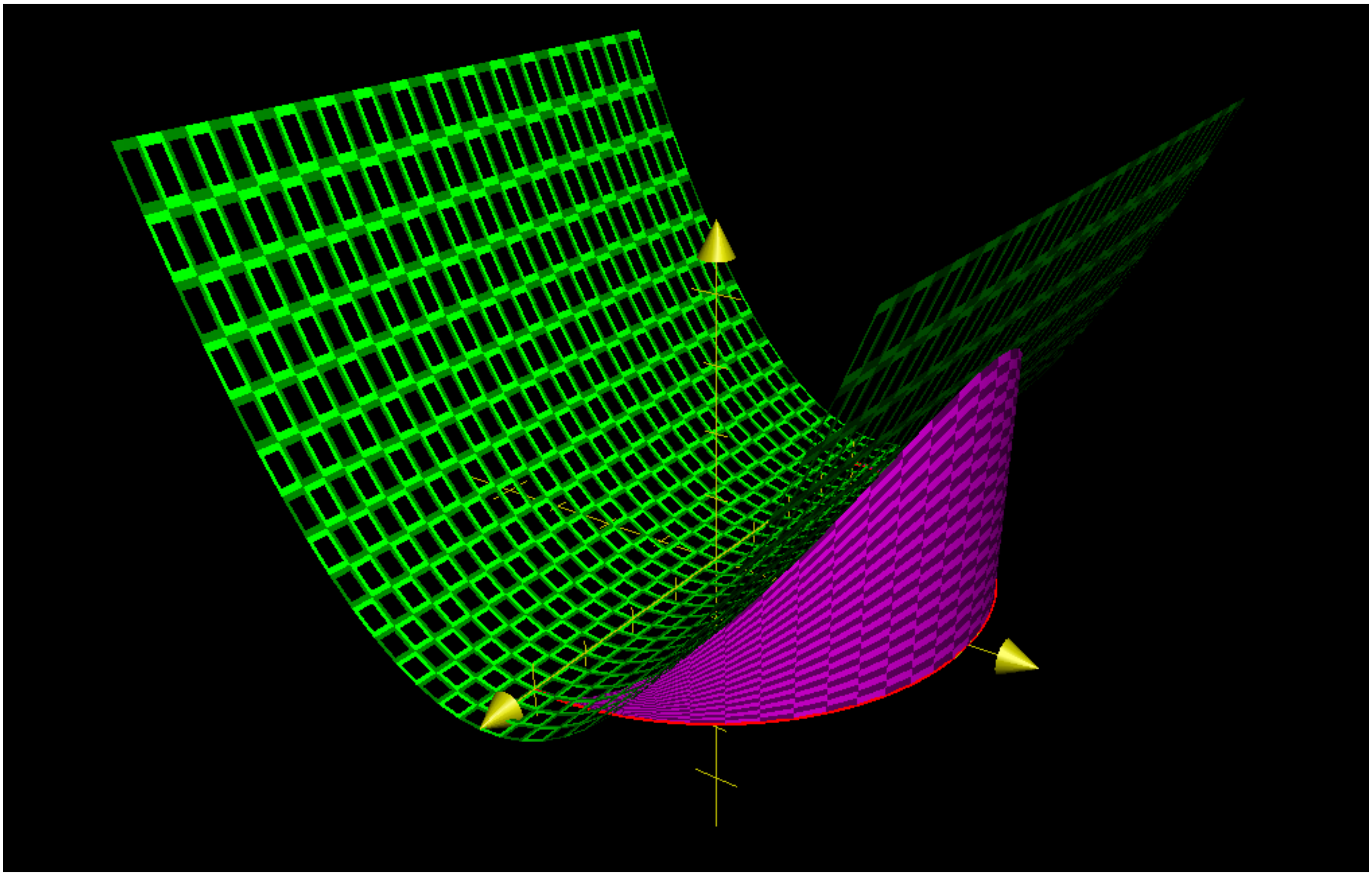
$t \in [0, \pi]$

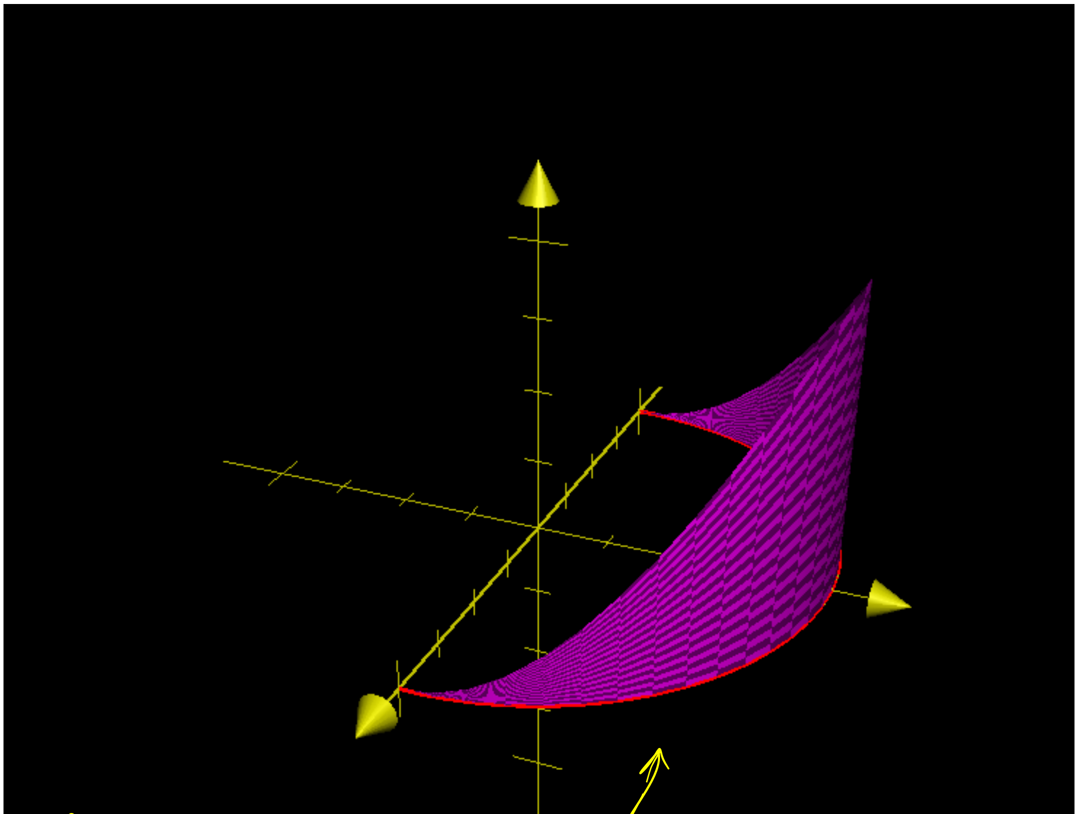
Voglio considerare

$$\int_\gamma y^2 \, ds$$




f(x,y) = y²
x
y



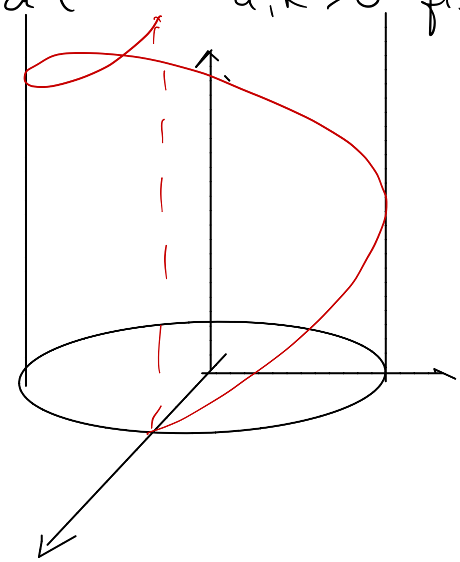


$\int_\gamma y^2 \, ds =$ area di questo "palizzata"
con segno

ESERCIZIO. Calcolare la massa di una molla a forma di spira d'elica cilindrica, di eq^{ni} parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\,t \\ z = at \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad a, R > 0 \text{ fissati}$$

sapendo che la densità lineare della molla in ogni punto è pari al quadrato della distanza dall'origine



$$M = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\,\text{sen}^2 t + a^2t^2)\, \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\sqrt{R^2\text{sen}^2 t + R^2\cos^2 t + a^2} \,=\, \sqrt{R^2+a^2}}\,dt =$$

$$= \sqrt{R^2+a^2} \int_0^{2\pi} (R^2 + a^2t^2)\,dt = \sqrt{R^2+a^2}\left(R^2\, 2\pi + \frac{a^2(2\pi)^3}{3}\right) \qquad \square$$

Baricentro di una curva. (per sempl. N=2)

Se γ rappresenta un filo metallico avente densità lineare $\rho(x,y)$

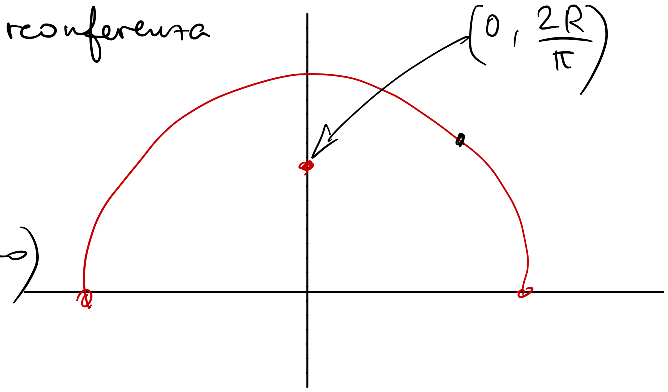
Si definisce baricentro di γ il punto $B(x_B, y_B)$, dove

$$x_B = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\text{massa del filo}} = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds}$$

$$y_B = \frac{\int_\gamma y\,\rho(x,y)\,ds}{\text{massa del filo}} = \frac{\int_\gamma y\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds}$$

Se ρ è costante $\quad x_B = \dfrac{\int_\gamma x\,ds}{L(\gamma)} \qquad y_B = \dfrac{\int_\gamma y\,ds}{L(\gamma)}$

Esempio: Baricentro di una semicirconferenza



$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

(se non specificato supponiamo $\rho = \text{cost}$)

$L(\gamma) = \pi R$

$$x_B = \frac{1}{\pi R}\int_\gamma x\,ds = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\,\underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{= R}\,dt = \frac{R}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos t\,dt}_{= 0} = 0$$

come era atteso.

$$y_B = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\,t\,dt = \frac{R}{\pi}\left(\cos 0 - \cos\pi\right) = \frac{2R}{\pi}$$

x_B,

MOMENTO DI INERZIA di un filo (rispetto ad un punto P_0, ad una retta r, ad un piano)

$$I = \int_\gamma \rho \, d(P(\underline{x}), P_0)^2 \, ds$$

ρ ← densità lineare

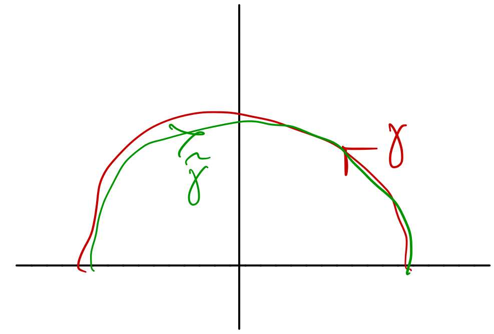
Momento di inerzia della semicirc. di prima rispetto all'asse delle x. ($\rho = 1$ per semplicità):

$$I = \int_0^\pi y^2 \, ds = \int_0^\pi R^2 \sin^2 t \, \underbrace{R \, dt}_{ds} = R^3 \int_0^\pi \sin^2 t \, dt =$$

$$= R^3 \int_0^\pi \frac{1 - \cancel{\cos 2t}}{2} \, dt = \frac{R^3}{2} \pi$$

OSS L'integrale curvilineo (e la lunghezza) non dipende da come ho parametrizzato la curva, neanche se cambio verso.

Esempio: La semicirconferenza di prima



$$\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t) \qquad t \in [0, \pi]$$

Si potrebbe scrivere come curva grafico

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad x \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \tilde{\gamma}(t) = \left(t, \sqrt{R^2 - t^2}\right)$$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds \qquad , \quad L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$$

verificare

Lavoro di una forza lungo una curva γ.

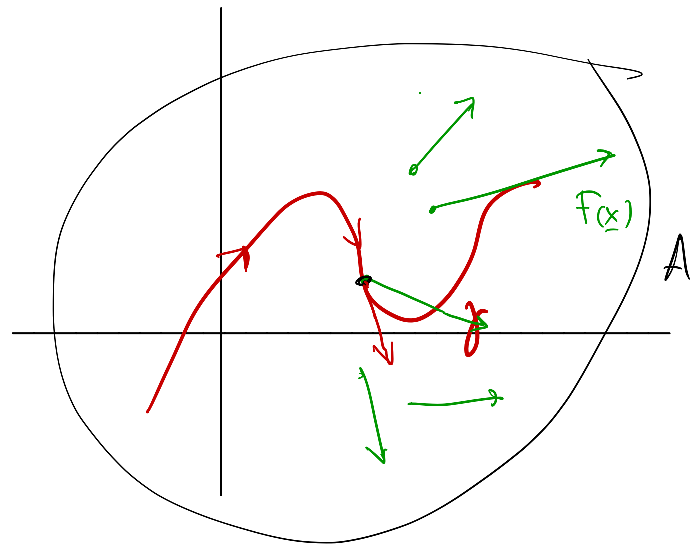
(integrale di un campo vettoriale, o integrale di 2ª specie)

$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare

$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ campo vettoriale, $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto contenente $\gamma([a,b])$

$\underline{x} \longmapsto \underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots F_N(\underline{x}))$

$\underline{F}$ continua



Definiamo l'integrale curvilineo del campo $\underline{F}$ lungo la curva $\underline{\gamma}$ come

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds$$

$\underline{T}$: versore tangente alla curva

$$L = \int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\cancel{\|\underline{\gamma}'(t)\|}} \underbrace{\cancel{\|\gamma'(t)\|}dt}_{ds} =$$

$$= \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \Big(F_1(\underline{\gamma}(t))\, x_1'(t) + F_2(\underline{\gamma}(t))\, x_2'(t) + \ldots + F_N(\underline{\gamma}(t))\, x_N'(t)\Big)\, dt$$

$$\underline{\gamma}(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$$

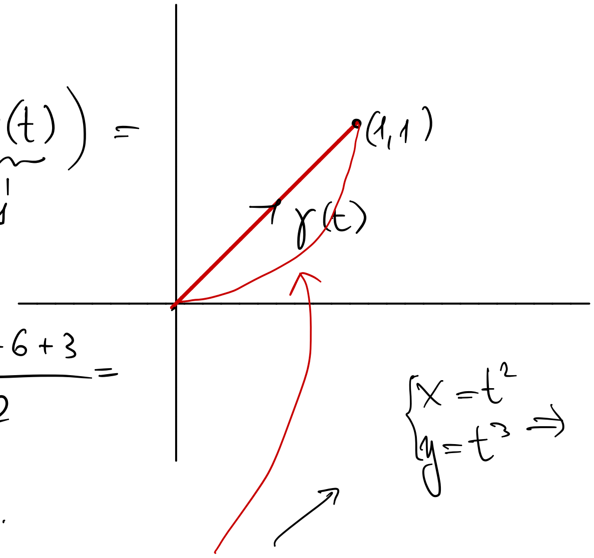
ESEMPIO Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y},\ x^3+y)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$.

ESEMPIO Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$\underline{F}(x,y) = \left(\sqrt{y},\ x^3+y\right)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$.

$$L = \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_0^1 dt \left(\sqrt{t}\cdot \underbrace{x'(t)}_{=1} + (t^3+t)\underbrace{y'(t)}_{=1}\right) =$$



$$= \int_0^1 \left(\sqrt{t} + t + t^3\right) dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{8+6+3}{12} =$$

$$= \frac{17}{12}.$$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow x = y^{2/3}$$

Calcolare il lavoro dello stesso campo se $\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t^3)$ $t \in [0,1]$

$$\tilde{L} = \int_{\tilde{\gamma}} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_0^1 dt \left(t^{3/2}\cdot 2t + (t^6+t^3)\, 3t^2 \right) =$$

$$\tilde{L} = \int_{\tilde{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^1 dt \left(t^{3/2} \cdot 2t + (t^6 + t^3)\, 3t^2 \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 \right) dt = 2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{3}{6} = \ldots$$

viene diverso da prima!

Il Lavoro di un campo vettoriale non dipende solo dagli estremi della curva, ma dal percorso effettivamente seguito.

OSS Se invece di prendere γ, prendo una curva $\tilde{\gamma}$ "equivalente" a γ (cioè descrive lo stesso sostegno nello stesso verso o in verso opposto) come cambia il lavoro?
Se la curva viene percorsa nello stesso verso, il lavoro resta uguale, se la curva viene percorsa in senso opposto, il lavoro cambia segno.
($\underline{T}$ cambia segno).

DEFINIZIONE Un campo vettoriale $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ si dice conservativo se $\underline{F}(\underline{x}) = \nabla V(\underline{x})$, dove V è una funzione scalare definita in A, detta potenziale.

Se $\underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo vettoriale conservativo con potenziale V, allora il suo integrale lungo una qualsiasi curva regolare $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ vale:

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)\, dt \overset{F=\nabla V}{=} \int_a^b \underbrace{\nabla V(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)}_{\frac{d}{dt}[V(\underline{\gamma}(t))]}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[V(\underline{\gamma}(t))\right] dt = V(\underline{\gamma}(t))\Big|_{t=a}^{t=b} =$$

$$= V(\underline{\gamma}(b)) - V(\underline{\gamma}(a))$$

punto di arrivo di γ

pto di partenza.

TEOREMA Sia $F: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale conservativo di potenziale V. Sia γ una curva regolare con sostegno in A che va dal punto P_1 al punto P_2 $(P_1, P_2 \in A)$.

aperto.

Allora

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = V(P_2) - V(P_1)$$

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale.

Come riconoscere se è conservativo.

Supponiamo $\underline{F} \in C^1(A; \mathbb{R}^N)$. Allora $\Rightarrow V \in C^2(A)$.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i,j = 1 \dots N.$$

Schwarz

Def. Un campo vettoriale si dice <u>irrotazionale</u> se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } A.$$

<u>Abbiamo provato che:</u>

<u>**TEOREMA**</u> C.N. affinché un campo vettoriale C^1 sia conservativo è che sia irrotazionale

E' anche una C.S.? A volte sì, a volte no, dipende da A.