UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"

- Facoltà di Farmacia e Medicina -

Corso di Laurea in CTF

1 REGOLE DI INTEGRAZIONE

1.1 REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

dove nella seconda espressione abbiamo usato la simbologia del differenziale:

$$df(x) = f'(x)dx \qquad dg(x) = g'(x)dx.$$

La regola di integrazione per parti discende dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni e dalla linearità dell'integrale indefinito:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g'(x)f(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$$

da cui, integrando

$$\int g'(x)f(x)dx = \int (fg)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx$$

Per arrivare alla regola di integrazione per parti basta ora osservare che $f(x)g(x)$ è una primitiva di $(fg)'(x)$, da cui

$$\int g'(x)f(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

ESEMPIO 1

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$$

La precedente uguaglianza si può facilmente verificare semplicemente derivando le funzioni $x\ln(x)-x+C$ e controllando che la derivata è esattamente $\ln(x)$. Tuttavia questo non spiega come si può arrivare a trovare questa formula. In questo compito ci aiuta la regola di integrazione per parti.
Infatti prendendo $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= x\ln(x) - \int x\frac{d}{dx}\ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE, in effetti avremmo dovuto scrivere che tale relazione vale per $x \in (0, +\infty)$ infatti per

$x \leq 0$ non ha senso calcolare $\ln(x)$.

Inoltre possiamo calcolare, ad esempio, il seguente integrale definito

$$\int_1^e \ln(x)dx = x\ln(x) - x\Big|_1^e = e\ln(e) - e - (1\ln(1) - 1) = e \cdot 1 - e - (1 \cdot 0 - 1) = 1$$

ESEMPIO 2

$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + C$$

La precedente uguaglianza si può facilmente verificare semplicemente derivando le funzioni $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + C$ e controllando che la derivata è esattamente $\ln(1+x^2)$.
Tuttavia questo non spiega come si può arrivare a trovare questa formula. In questo compito ci aiuta la regola di integrazione per parti.
Infatti prendendo $f(x) = \ln(1+x^2)$ e $g(x) = x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+x^2)dx &= x\ln(1+x^2) - \int x\frac{d}{dx}\ln(1+x^2)dx \\
&= x\ln(1+x^2) - \int x\frac{1}{1+x^2}2xdx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

per proseguire va osservato che

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+x^2)dx &= x\ln(x) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\left[\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx\right] \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\left[\int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right] \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\left[x - \arctan(x) + C\right] \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + C
\end{aligned}$$

Inoltre possiamo calcolare, ad esempio, il seguente integrale definito

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)dx &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)\Big|_0^1 \\
&= 1\ln(1+1^2) - 2 \cdot 1 + 2\arctan(1) - \left[0\ln(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2\arctan(0)\right] \\
&= \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} - 0 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ESEMPIO 3

$$\int xe^{-x}dx = -(x+1)\,e^{-x} + C$$

La precedente uguaglianza si può facilmente verificare semplicemente derivando le funzioni $-(x+1)\,e^{-x} + C$ e controllando che la derivata è esattamente xe^{-x}.
Tuttavia questo non spiega come si può arrivare a trovare questa formula. In questo compito ci aiuta la regola di integrazione per parti.
Infatti prendendo $f(x) = x$ e $g(x) = -e^{-x}$ di modo che $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^{-x}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})1dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} + (-e^{-x}) + C = -(x+1)\,e^{-x} + C\end{aligned}$$

Inoltre possiamo calcolare, ad esempio, il seguente integrale definito

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -(x+1)\,e^{-x})\Big|_0^1 = -(1+1)\,e^{-1} - \big[-(0+1)\,e^{-0}\big] = -2e^{-1} + 1.$$

È interessante notare che, nell'intervallo $[0,1]$, la funzione xe^{-x} è sempre maggiore o uguale a 0 e minore o uguale a 1 e quindi ci aspettiamo che l'integrale $\int_0^1 xe^{-x}dx$ venga un numero compreso tra 0 ed 1. A riprova osserviamo che il numero che ci è venuto dai calcoli è $1 - 2/e$ che effettivamente è un numero compreso tra 0 e 1. Ovviamente questo fatto da solo NON GARANTISCE che il conto effettuato sia giusto, MA, IMPORTANTE, se ci fosse venuto un numero maggiore di 1 OPPURE un numero minore di 0 avremmo potuto affermare che avevamo fatto un qualche errore.
IMPORTANTE: se durante un esame vi dovesse capitare una situazione simile, cercate di trovare dove sta l'errore, ma se non lo trovate, vi prego di scrivere una frase simile alla seguente:
in questo momento non capisco dove è l'errore, ma ci deve essere un errore perché il risultato non è plausibile.

1.2 REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

DA COMPLETARE (trovate qualche indicazione nel diario delle lezioni sia del 2015-16 che del 2014-15)