Foglio 10 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

5 dicembre 2015

10.1 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{y'(x)}{x} + (y'(x))^2 = 0 \\ y(1) = \ln 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

10.2 Esercizio

Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + \frac{(y')^2}{2y} = \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}(y')^2}$$

10.3 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{y^2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

10.4 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 + y(y')^3 = 0 \\ y(0) = e \\ y'(0) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Provare inoltre che la soluzione di quest'ultimo problema è definita per ogni $x > 0$, che è una funzione crescente e concava, e che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha < \frac{1}{2}.$$

10.5 Esercizio

Dati un punto P e una retta r, passante per P, considerare le circonferenze che passano per P e hanno centro su r. Determinare le traiettorie ortogonali di tali circonferenze.

10.6 Esercizio

Determinare le traiettorie ortogonali alla famiglia di iperboli simmetriche rispetto all'asse x e passanti per il punto $(1,0)$.

10.7 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^3 y'' = e^y (y-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2e} \end{cases}$$

e si calcoli il limite, per $x \to +\infty$, della soluzione.

10.8 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y^{3/2} y'' = \left(1+(y')^2\right)^{3/2} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

10.9 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 = \cos^2 y - \cos y \operatorname{sen} y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

10.10 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 - e^{-y} = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

10.11 Esercizio

Trovare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u'(x) = 4\,u(x) + 20\,v(x) - e^{3x} \\ v'(x) = \dfrac{u(x)}{2} + v(x) + 2x \end{cases}$$

10.12 Esercizio

Al variare del parametro $\alpha > 0$, trovare tutte le soluzioni del problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = 1 \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

N.B.: Non è un problema di Cauchy.

10.13 Esercizio

Risolvere i seguenti sistemi differenziali nelle incognite $u(x)$, $v(x)$:

$$\begin{cases} u' = u + 2v \\ v' = u - \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} u' + v + x = 0 \\ v' - v + 2u = 1 \end{cases}$$

10.14 Esercizio

Data l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti

$$(*) \qquad u''(t) + \frac{1}{t^2} u(t) = 0$$

i. si verifichi che $z(t) = \sqrt{t}$ è soluzione,
ii. si provi l'esistenza di una seconda soluzione linearmente indipendente della forma $w(t) = c(t)z(t)$,
iii. si trovi la soluzione di $(*)$ con i dati iniziali $u(1) = 1$, $u'(1) = 0$.

10.15 Esercizio

Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.16 Esercizio

Dato il seguente sistema lineare

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

si scriva una base dello spazio vettoriale delle soluzioni.

10.17 Esercizio

Dato il sistema lineare

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) \qquad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

si provino le seguenti affermazioni
i. $A^t = -A$ allora $|\mathbf{u}(t)|^2 = c \in \mathbb{R}$
ii. $A^2 = O_2$ allora $\mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(0)\,t + \mathbf{u}(0)$

10.18 Esercizio

Dato il seguente sistema

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) - w^2(t) \\ w'(t) = u(t)\,w(t) - w(t) \end{cases}$$

si provi che
i. $\left[u^2(t) + w^2(t)\right]$ è strettamente descrescente,
ii. le soluzioni esistono per ogni $t > 0$,
iii. $(u(t), w(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} (0,0)$.