Equazione di Riccati (varie fonti: Wikipedia,

Si tratta di un'equazione del primo ordine non lineare, della forma

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)(y(x))^2 + c(x)$$

OSS L'esistenza in piccolo e l'unicità sono garantite, ma non è garantita esistenza globale (crescita quadratica in y)

OSS se $c(x) \equiv 0$ è un'equazione di Bernoulli
se $b(x) \equiv 0$ è lineare.

OSS Applicazioni: controllo ottimo, eq^{ne} di Schroedinger in dim. 1.

METODI DI RISOLUZIONE:

METODO 1: Riduzione ad un'eq^{ne} lineare del 2° ordine (se $b(x) \in C^1$)

Poniamo

$$\boxed{u(x) = e^{-\int b(x)\,y(x)\,dx},}$$

da cui

$$\ln(u(x)) = -\int b(x)\,y(x)\,dx \implies \frac{u'(x)}{u(x)} = -b(x)\,y(x)$$

$$\implies y(x) = -\frac{u'}{bu} \implies y' = -\frac{u''bu - u'(b'u + bu')}{b^2u^2}$$

L'equazione diventa:

$$\frac{u''bu - u'(b'u+bu')}{b^2u^2} = +\frac{au'}{bu} - \frac{b\,(u')^2}{b^2u^2} - c \implies$$

$$\implies bu''u - b'uu' - \cancel{b(u')^2} = abu'u - \cancel{b(u')^2} - cb^2u^2$$

$$\implies u'' = \left(\frac{b'}{b} + a\right)u' - cbu$$

quindi l'eq^{ne} è diventata lineare (a coefficienti non costanti).
Se si riesce a risolvere, poi $y(x) = -\dfrac{u'}{bu}$ ▨

METODO 2 - Determinazione di altre soluzioni data una soluzione particolare.

Se si conosce una soluzione y_1 dell'equazione di Riccati, cerchiamo una soluzione nella forma $y(x) = y_1(x) + u(x)$. L'equazione diventa

$$\underbrace{y_1'} + u' = au + \underbrace{ay_1} + bu^2 + 2buy_1 + \underbrace{by_1^2} + \underbrace{c}$$

il contributo di questi 4 termini si annulla perché y_1 è sol^{ne}.

$\Rightarrow u' = (a + 2by_1)u + bu^2$, e questa è di Bernoulli

ESEMPIO 1:

$$(P)\begin{cases} y'(x) = (x-1)\,y^2(x) + (1-2x)\,y(x) + x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Si vede subito che la soluzione costante $y_1(x) \equiv 1$ è sol^{ne} dell'eq^{ne}, ma non della condizione iniziale.

Pertanto cerchiamo una soluzione della forma $y(x) = 1 + u(x)$

$$\Rightarrow \quad u' = (x-1)(1+u)^2 + (1-2x)(1+u) + x$$

$$\Rightarrow \quad u' = \cancel{x} - \cancel{1} + 2(\cancel{x}-1)u + (x-1)u^2 + \cancel{1} - 2\cancel{x} + (1-\cancel{2}x)u + \cancel{x}$$

$$\Rightarrow \quad u' = -u + (x-1)u^2, \quad \text{con la cond. iniziale } u(x) = 1$$

Poniamo $u = -\dfrac{1}{v} \Rightarrow \dfrac{v'}{v^2} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{x-1}{v^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow v' = v + x - 1$ con la condizione iniziale $v(0) = -1$

La soluzione dell'omogenea è $v(x) = ke^x$, a cui aggiungo una soluzione particolare della forma

$$v_p(x) = Ax + B \Rightarrow v_p' = A \quad \Rightarrow \quad A = Ax + B + x - 1$$

$$\Rightarrow A = -1, \; B = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p(x) = -x.$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = k e^{x} - x \qquad \Longrightarrow \quad k = -1$$

$$\boxed{\text{C.I.} \quad v(0) = -1}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = -\left(e^{x} + x\right) \Longrightarrow u(x) = \frac{1}{e^{x} + x}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = 1 + \frac{1}{e^{x} + x}$$

OK, VERIFICATO!

DEF Si dice CURVA REGOLARE una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1([a,b])$ (a volte basterà $C^0([a,b]) \cap C^1(a,b)$)

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$

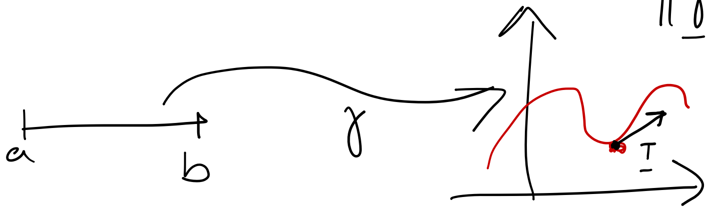
di classe C^1

$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$

queste componenti non possono annullarsi tutte insieme

t.c. $\forall t \in (a,b)$ $\underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$, cioè $(x_1'(t), \dots x_N'(t)) \neq \underline{0}$

OSS. La condizione $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ assicura che esiste il $\boxed{\text{versore tangente}}$ $\underline{T}(t) = \dfrac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|}$



ESEMPI curve grafico

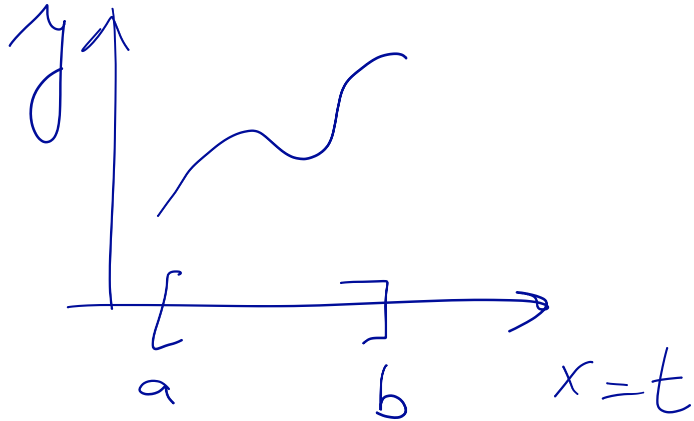
$f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Ad essa si può associare la curva grafico in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (t, f(t))$$

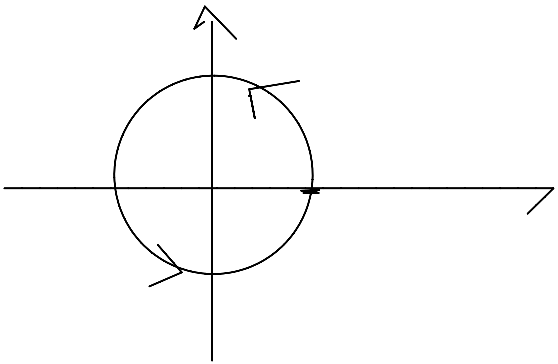
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$x'(t) = 1 \neq 0$



2) CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad R > 0 \text{ fissato.}$$



<u>DEF</u> $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathbb{R}^N$ si dice "sostegno" della curva

Curve diverse possono avere lo stesso sostegno.

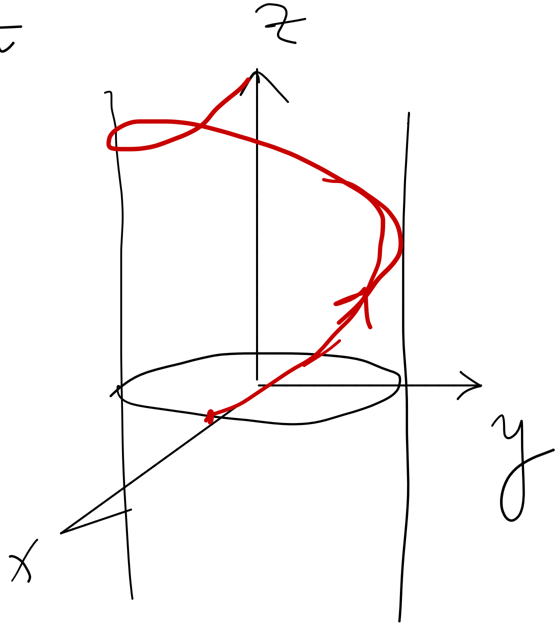
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad \text{con } a, b > 0 \implies \text{ellisse}$$

3) <u>Elica cilindrica</u>

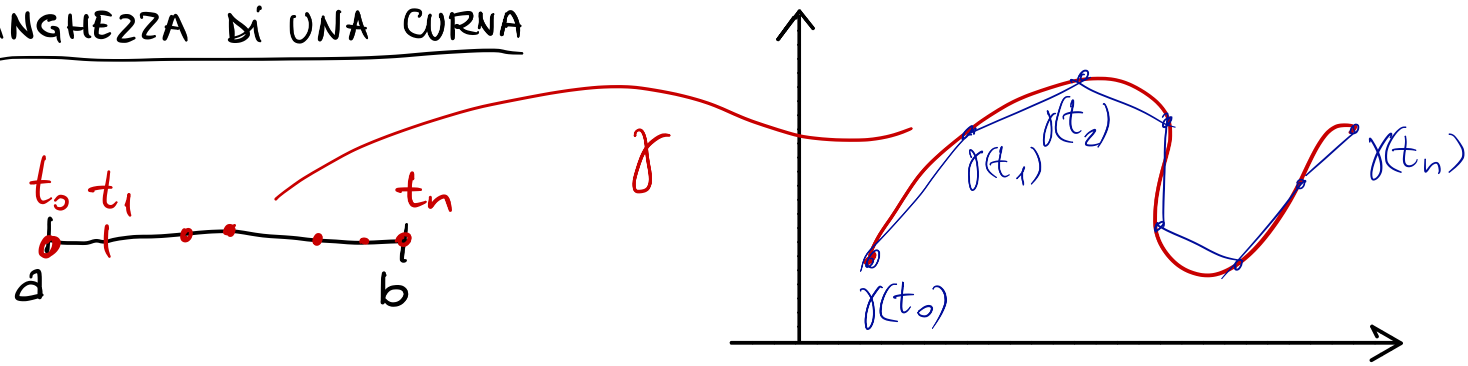
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = at \end{cases}$$

$R, a > 0$

$t \in [a, b]$



LUNGHEZZA DI UNA CURVA



Sia $D = \{ t_0, t_1, \dots t_n \}$ con $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

$$L_D(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \| \underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1}) \|$$ lunghezza della spezzata.

Definisco $$L(\gamma) = \sup_{D \text{ partiz. di } [a,b]} L_D(\gamma)$$

TEOREMA

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ($\underline{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$) è una curva ~~regolare~~ di classe $C^1([a,b])$, allora

$$L(\gamma) = \int_a^b \| \underline{\gamma}'(t) \| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i'(t))^2} \, dt$$

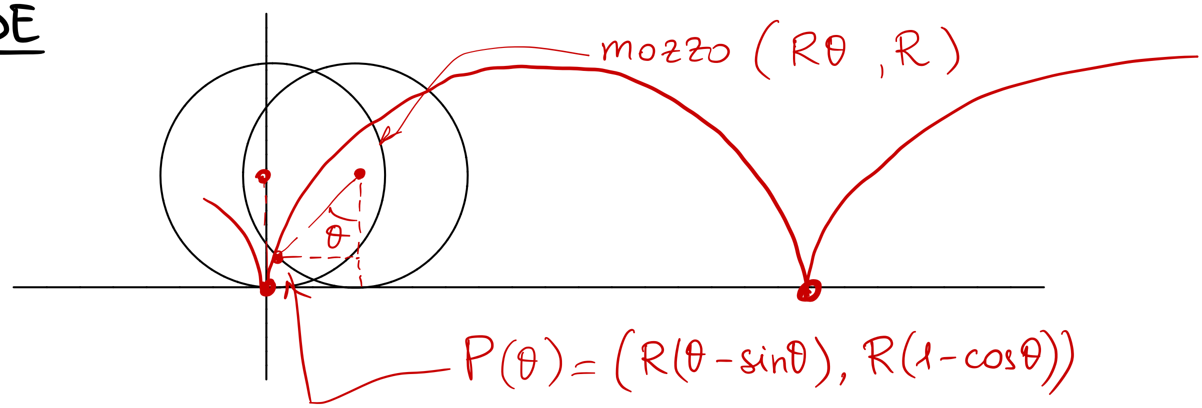
ESEMPIO: Lunghezza di una circonferenza.

$$\underline{\gamma}(t) \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R \,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{cases} x'(t) = -R \,\text{sen}\, t \\ y'(t) = R \cos t \end{cases}$$

$$L(\underline{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \| \underline{\gamma}'(t) \| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \,\text{sen}^2 t + R^2 \cos t^2} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R$$

CICLOIDE



Curva generata da un punto di una circonferenza che ruota senza strisciare su una retta.

Lunghezza di un arco di cicloide :

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = R(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x'(\theta) = R(1-\cos\theta) \\ y'(\theta) = R\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

oss $x'(\theta) = y'(\theta) = 0$ per $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Non è regolare agli estremi, ma è C^1 fino agli estremi.

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1-\cos\theta)^2 + R^2\,\text{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} R\sqrt{1+\cos^2\theta - 2\cos\theta + \text{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,R \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \overset{f \text{ periodica}}{=} \sqrt{2}\,R \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \overset{f \text{ pari}}{=} 2\sqrt{2}\,R \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\,R \int_0^{\pi} \frac{\overbrace{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}^{=|\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}\, d\theta = 2\sqrt{2}\,R \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\, d\theta = \begin{bmatrix} \text{sost} \\ \cos\theta = t \end{bmatrix}$$

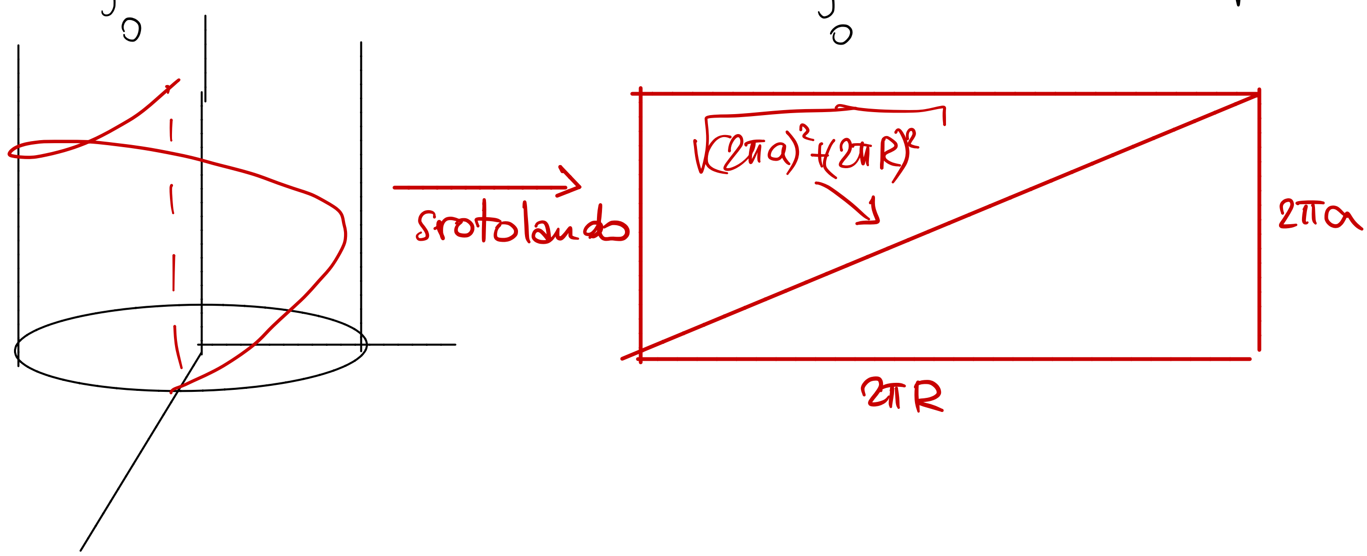
y
x
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
-0,5
-1
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
6
6,5
7
7,5

$$2\sqrt{2}R\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\,d\theta = \left[\begin{array}{l}\text{sost}\\ 1+\cos\theta = t\end{array}\right] = 2\sqrt{2}R\int_0^{2}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{2}R\,2\sqrt{2} = 8R.$$

Lunghezza dell'elica cilindrica

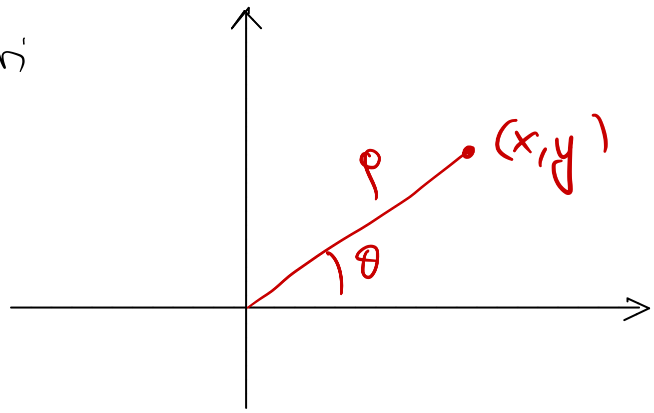
$$\gamma\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\text{sen}\,t \\ z(t) = at \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi] \qquad \begin{cases} x'(t) = -R\,\text{sen}\,t \\ y'(t) = R\cos t \\ z'(t) = a \end{cases}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\text{sen}^2 t + R^2\cos^2 t + a^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+a^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2+a^2}$$



CURVE IN COORDINATE POLARI

Coord. polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

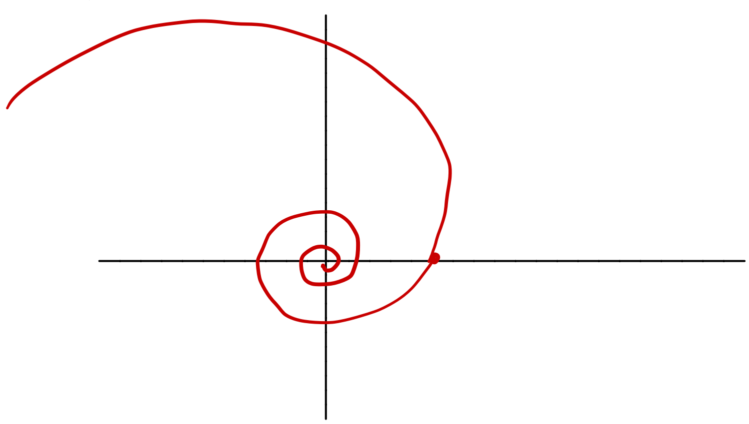
se $\rho = \rho(\theta)$, otteniamo una curva $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\theta \in [a,b]$

Esempi:

spirale logaritmica $\rho = e^{\theta}$

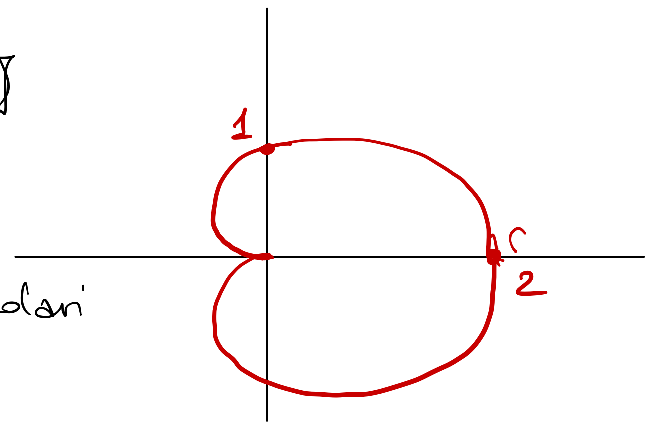
$\rho = a\theta$ spirale archimedea

$$\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$



Cardioide: $\rho(\theta) = R\,(1+\cos\theta)$ per semplicità $R=1$

$$\begin{cases} x(\theta) = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$



Lunghezza di una curva in coord. polari

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [a,b]$$

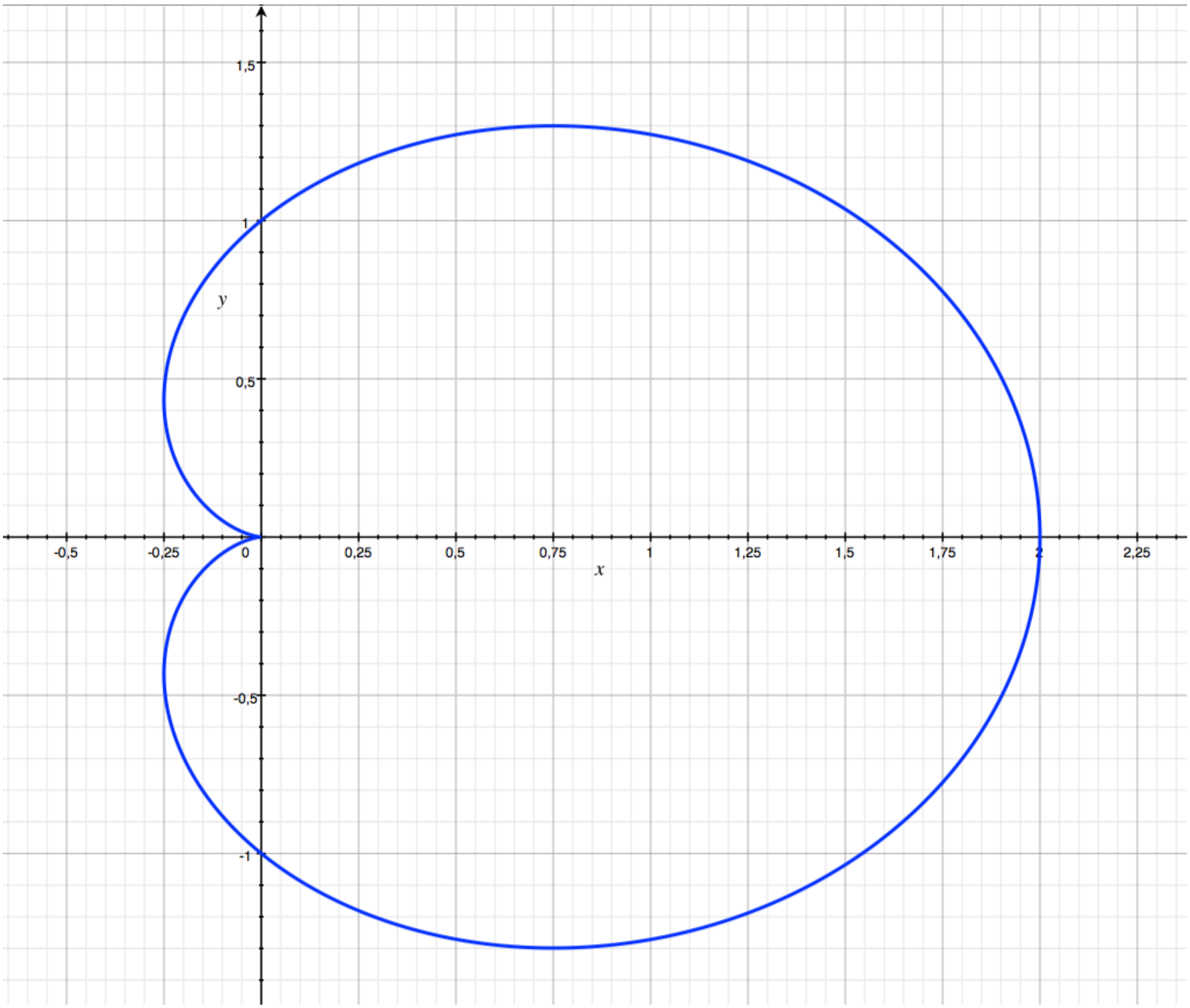
$$\begin{cases} x'(\theta) = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y'(\theta) = \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{cases} \qquad \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2}$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2}\,d\theta .$$

Nel caso della cardioide $\quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$

$\rho(\theta) = 1+\cos\theta, \quad \rho'(\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\theta}$$



1,5
1
y
0,5
-0,5
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2
2,25
-0,5
-0,25
0
x
-0,5
-1

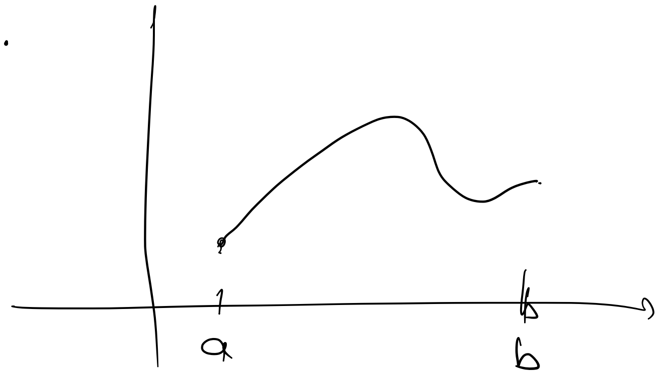
$$L(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 8$$

$t = 1-\cos\theta$

$\operatorname{sen}\theta\, d\theta = dt$

Lunghezza di una curva grafico.



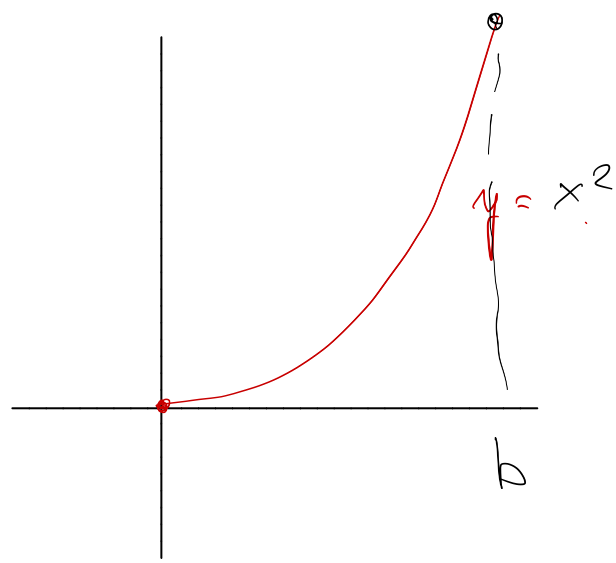
$y = f(x) \qquad x\in[a,b]$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t)\end{cases} \qquad t\in[a,b]$$

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(t)\end{cases} \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)}\,dt$$

Per esempio $\quad y = x^2 \qquad x\in[0,b]$



$$L(\gamma) = \int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx =$$

$$\boxed{2x = t \quad dx = \frac{dt}{2}}$$

$$\int\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$\int 1\sqrt{1+t^2}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int\sqrt{1+t^2}\,dt + \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

per parti

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\, t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\, t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)}_{\text{settsh. } t} + c$$

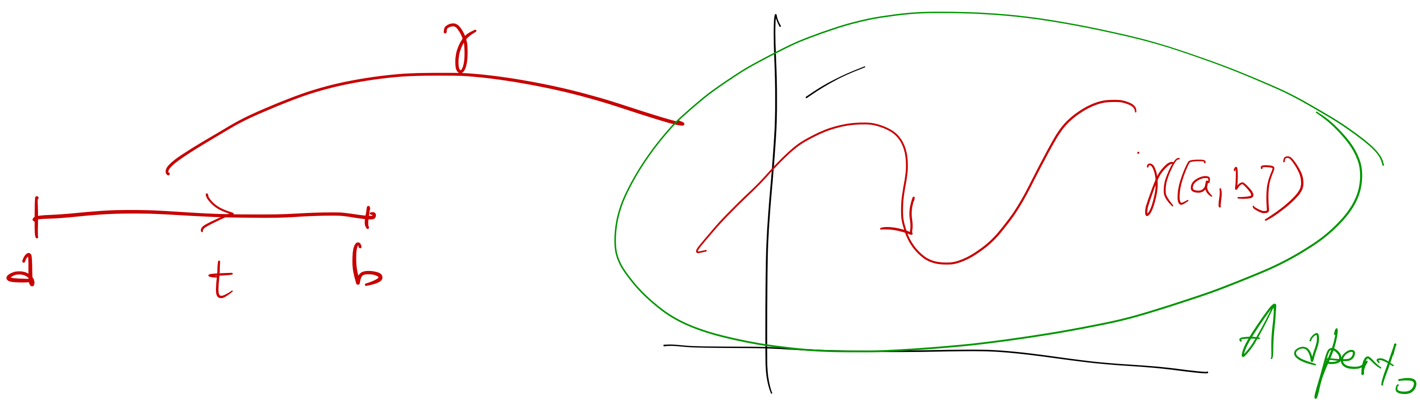
$$\int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right)\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{1+4b^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2b+\sqrt{1+4b^2}\right)$$

<u>Ellisse</u> $\quad \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi] \implies \begin{cases} x'(\theta) = -a\sin\theta \\ y'(\theta) = b\cos\theta \end{cases}$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}\;d\theta = \quad (\text{integrale ellittico}),$$

Integrali curvilinei di 1ª specie (integrali di f. scalari)



Sia A un aperto contenente il sostegno di γ.
Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Vogliamo definire $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$
↳ incrementino di lunghezza corrispondente a dt.