Trovare l'integrale generale dell'eq^{ne}

$$t^2 y'' - (t^2+2t)y' + (t+2)y = 0 \qquad y = y(t)$$

Eq^{ne} lineare del 2° ordine omogenea a coeff^{ti} non costanti.

$y(t) = t$ è soluzione

L'altra (lin. indip.) la cerchiamo della forma $y(t) = t\,v(t)$

$y'(t) = tv' + v$; $\quad y'' = tv'' + 2v'$

$$t^2(tv''+2v') - (t^2+2t)(tv'+v) + (t+2)tv = 0$$

$$t^3v'' + \cancel{2t^2v'} - t^3v' - \cancel{t^2v} - \cancel{2t^2v'} - \cancel{2tv} + \cancel{t^2v} + \cancel{2tv} = 0$$

$$t^3v'' - t^3v' = 0$$

$$v'' - v' = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

$\lambda = 0 \Rightarrow y = ct$ già vista

$\lambda = 1 \Rightarrow v = e^t \Rightarrow y = te^t$

$y' = e^t(t+1)$; $\quad y'' = e^t(t+2)$

$$t^2(t+2) - (t^2+2t)(t+1) + (t+2)t = 0 \Rightarrow \cancel{t^3} + \cancel{2t^2} - \cancel{t^3} - \cancel{t^2} - \cancel{2t^2} - \cancel{2t} + \cancel{t^2} + \cancel{2t} = 0$$

Nel caso generale $y''+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$

Supponiamo di conoscere una soluzione $u(x)$

Ne cerco un'altra nella forma $y(x)=u(x)v(x)$, con v incognita

$y=uv$, $y'=u'v+uv'$; $y''=u''v+2u'v'+uv''$

$$u''v+2u'v'+uv''+a(u'v+uv')+buv=0$$

$$v\underbrace{(u''+au'+bu)}_{=0}+uv''+(2u'+au)v'=0$$

Poniamo $w=v'$ $\Rightarrow$ eq^{ne} del 1° ordine lineare $w'=-\frac{(2u'+au)}{u}w$

$\Rightarrow$ si trova w $\Rightarrow$ integrando si trova v. $\Rightarrow$ $y=uv$

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} u' - 2u + 3v = 1 \\ v' - u + 2v = \dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

$u(x)$, $v(x)$

L'idea è quella di ricondursi ad una eq^{ne} lineare del 2° ordine

Il metodo si applica a tutti i sistemi a coefficienti costanti

Deriviamo la 1^a eq^{ne} $\Rightarrow$ $u'' - 2u' + 3v' = 0$

dalla 2^a $\quad v' = u - 2v + \dfrac{1}{1+e^x}$ $\quad \Longrightarrow u'' - 2u' + 3u - 6v + \dfrac{3}{1+e^x} = 0$

dalla 1^a eq^{ne} $\Rightarrow$ $3v = 1 - u' + 2u$ $\longrightarrow$ $u'' - \cancel{2u'} + 3u - 2 + \cancel{2u'} - 4u + \dfrac{3}{1+e^x} = 0$

$$u'' - u = 2 - \frac{3}{1+e^x}$$ eq^{ne} lineare del 2° ord. a coeff. cost.

Integrale dell'omogenea $\Rightarrow$ $z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$$2 - \frac{3}{1+e^x} = \frac{2e^x - 1}{1+e^x}$$ per trovare una sol. particolare uso il metodo di variaz. delle costanti

$$u'' - u = \frac{2e^x - 1}{1+e^x}$$

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \dfrac{2e^x - 1}{1+e^x} \end{cases}$$

$$\cancel{2}c_1' = \frac{1}{2}\frac{2e^x - 1}{(1+e^x)e^x} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x - 1}{(1+e^x)e^x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{2}{t} - 1\right)}{1+\frac{1}{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2-t}{1+t}\,dt =$$

$$e^{-x} = t$$

$$-e^{-x}dx = dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t+1-3}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\left(t - 3\ln(t+1)\right) = \frac{e^{-x}}{2} - \frac{3}{2}\ln(1+e^{-x})$$

$$c_2' = -c_1' e^{2x} = -\frac{1}{2}\frac{(2e^x - 1)e^x}{1+e^x} \Rightarrow c_2 = \int \dots \Rightarrow \text{si trova } c^2.$$

$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Integrale generale: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + y_p(x)$

Risolvere l'eq^{ne}

$$xy'' + y' - xy = 0$$ (equazione di Bessel di ordine zero)

Supponiamo che una soluzione si possa scrivere in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ e supponiamo che il raggio di convergenza R sia R>0.

Usando il teorema di derivaz. per serie:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \text{ t.c. } |x|<R$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$. L'eq^{ne} diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n \, a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) n \, a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} \right] x^n \equiv 0$$

$\Rightarrow$ tutti i coeff^{ti} sono nulli

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} a_{n-1} \end{cases} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} a_{n-2}$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0$$

Assegnato $a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4} a_0 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{16} a_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} a_0$

$$a_6 = \frac{1}{36} a_4 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} a_0 \;, \quad a_8 = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} a_0$$

$$8^2 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2$$

$$2^8 (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2$$

$$a_{2n} = \frac{a_0}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \Rightarrow R = \infty.$$

OSS L'eq^{ne} "impone" $a_1 = y'(0) = 0$, quindi "impone" una delle cond^{ni} di Cauchy in $x=0$. Ciò non contraddice il teorema di Cauchy perché, una volta scritta l'equazione in forma normale:

$$y'' = -\frac{y'}{x} + y$$

il secondo membro non è definito per $x = 0$.

Esercizio per casa Considerare il pb di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y(x) = 4\cos x$$

Ricavarselo per serie (Metodo di Frobenius).

Equazioni della forma $f(y, y', y'') = 0$ (non dipendenti esplicitamente dalla x)

(autonome)

Si scrive $y' = u(y)$

$$y''(x) = \frac{du}{dy}(y)\,\frac{dy}{dx} = \dot{u}(y)\,u(y)$$

Trattiamo l'eq^{ne} come un'eq^{ne} nella incognita $u(y)$

L'eq^{ne} diventa $f(y, u(y), u(y)\dot{u}(y)) = 0$ del primo ordine

$\Longrightarrow$ troviamo $u(y)$ $\Rightarrow$ l'eq^{ne} $y' = u(y)$ diventa un'eq^{ne} a var. separ.

si spera

ESERCIZIO

Risolvere il pb. di Cauchy
$$\begin{cases} (1+y^2)\,y'' = y\,(y')^2 \\ y(4) = 0 \\ y'(4) = 1 \end{cases}$$

Poniamo $y' = u(y) \Rightarrow y'' = \dot{u}\,u$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+y^2)\,u(y)\,\dot{u}(y) = y\,(u(y))^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$ perché per $x=4 \Rightarrow y=0,\ y'=1$

$(1+y^2)\cancel{u}\,\dot{u} = y\,u^{\cancel{2}}$ posso dividere per u perché $u\equiv 0$ non verifica la cond. iniz.

$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{y}{1+y^2} \Rightarrow \ln u = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c \Rightarrow u(y) = k\sqrt{1+y^2}$

$\underset{\Longrightarrow}{C.I.}\ 1 = k \Rightarrow u(y) = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y' = \sqrt{1+y^2}$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2} \\ y(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = x + c$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = \text{settsh}(y) \Rightarrow y(x) = sh(x+c)$$

$$0 = sh(x+c)$$

$$y(x) = sh(x-4)$$

L'integrale si può fare anche con la sost.

$$\sqrt{1+y^2} = t - y$$

$$y + \sqrt{1+y^2} = k_1 e^x \underset{C.I.}{\Longrightarrow} 1 = k_1 e^4 \Rightarrow k_1 = e^{-4}$$

$$y + \sqrt{1+y^2} = e^{x-4} \Longrightarrow \sqrt{1+y^2} = e^{x-4} - y \Longrightarrow 1 + \cancel{y^2} = e^{2(x-4)} + \cancel{y^2} - 2y e^{x-4}$$

$$y(x) = -\frac{1-e^{2(x-4)}}{2e^{x-4}} = -\frac{1}{2}\left(e^{-(x-4)} - e^{(x-4)}\right) = sh(x-4)$$

$$sh\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$