Esempio:

Voglio risolvere

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E) \qquad (Ax+B)e^{2x}$$

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 0 \quad (E_0)$$

Si cercano sol^{ni} di tipo $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

(E_0) diventa $(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6)\cancel{e^{\lambda x}} \equiv 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0 \qquad \lambda = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 2 & -6 \\ 1 & & 1 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & / \end{array}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 6)$$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4-6} = -2 \pm i\sqrt{2}$$

Ho trovato le seguenti sol^{ni}: $y_1(x) = e^x$

$$y_2(x) = e^{(-2+\sqrt{2}i)x} \qquad y_2(x) = e^{-2x}\cos(\sqrt{2}x)$$ sono lin. indip.

$$y_3(x) = e^{(-2-\sqrt{2}i)x} \qquad y_3(x) = e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

Integrale gen. di (E_0)

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}\cos(\sqrt{2}x) + c_3 e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

Ricerca della sol^{ne} particolare

Cerco una sol^{ne} particolare della forma $y(x) = (Ax+B)e^{2x}$

$$y'(x) = e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$y''(x) = e^{2x}(2A + 2A + 4Ax + 4B) = 4e^{2x}(A + Ax + B)$$

$$y'''(x) = 4e^{2x}(A + 2A + 2Ax + 2B) = 4e^{2x}(2Ax + 3A + 2B)$$ L'eq^{ne} diventa

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E)$$

$$y(x) = (Ax+B)e^{2x}$$

$$y'(x) = e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$y''(x) = e^{2x}(2A + 2A + 4Ax + 4B) = 4e^{2x}(A + Ax + B)$$

$$y'''(x) = 4e^{2x}(A + 2A + 2Ax + 2B) = 4e^{2x}(2Ax + 3A + 2B)$$ L'eq^{ne} diventa

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E)$$

$$8Ax + 12A + 8B + 12A + 12Ax + 12B + 2A + 4Ax + 4B - 6Ax - 6B = 5x$$

$$A = \frac{5}{18}$$

$$26A + 18B = 0 \qquad B = -\frac{13}{9}A = -\frac{65}{162}$$

Quindi l'integrale generale dell'eq^{ne} (E) è:

$$y(x) = \left(\frac{5}{18}x - \frac{65}{162}\right)e^{2x} + c_1 e^x + e^{-2x}\left(c_2\cos(\sqrt{2}x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$$

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{x} \quad (E)$$

$y_p(x) = (Ax + B)e^{x} \Longrightarrow$ fallisco, perché e^{x} è sol^{ne} dell'omog.

$\Longrightarrow$ si prende $y_p(x) = x(Ax + B)e^{x} = (Ax^2 + Bx)e^{x} \Longrightarrow$ si calcolano A, B

(farlo!)

Eq^{ni} lineari a coeff^{ti} costanti.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad (E) \qquad a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (E_0)$$

$$\Rightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad (EA).$$

Trovo le n radici (reali o complesse di (EA))

Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è radice di (EA) $\Rightarrow e^{\lambda_0 x}$ è sol^{ne} di (E_0)

Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è radice di (EA) con molteplicità $k>1$, cioè il polinomio è divisibile per $(\lambda-\lambda_0)^k$, $\Rightarrow e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$ sono sol^{ni} di (E_0) lin. indip.

Se $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate, $\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ sono sol^{ni} di (E_0) lin. indip.

Se $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate, con molteplicità k, cioè $((\lambda-\alpha)^2+\beta^2)^k$ è un fattore del polinomio $P(\lambda)$, allora

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \dots,$$

$$\dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

sono $2k$ sol^{ni} di (E_0) lin. indip.

$$(\lambda^2+4\lambda+13)^3 \qquad \lambda = -2 \pm 3i \quad \text{molt. } 3.$$

Questo conclude la risoluzione di (E_0).

Per risolvere (E) devo cercare una sol^{ne} particolare $y_p(x)$ di (E)

1° metodo di somiglianza

Se $g(x)$ è del tipo $P_h(x)\,e^{\alpha x}$ ($P_h(x)$ = polinomio di grado h)

$\Rightarrow$ si cerca una sol^{ne} dello stesso tipo $\Rightarrow$ $y_p(x) = Q_h(x)\,e^{\alpha x}$

si devono trovare i coeff^{ti} di Q_h "provando" la soluzione $y_p(x)$.

Se però $\lambda = \alpha$ è sol^{ne} con molt. k di (EA), allora cerco

$$y_p(x) = x^k Q_h(x)\,e^{\alpha x}$$

Se $g(x) = P_h(x)\,e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ (opp. $\cos(\beta x)$) $\rightarrow$ si cerca

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left(Q_h(x)\,\mathrm{sen}(\beta x) + R_h(x)\cos(\beta x)\right)$$

OSS 1 devono sempre comparire sen e cos.

Se $\lambda = \alpha \pm i\beta$ è radice di molt. k di (EA), allora devo moltiplicare la $y_p(x)$ di prima per x^k.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y_0$$

Se abbiamo un'eq^{ne} del tipo

$L(y) = g(x) \qquad (E)$

$L(y) = 0 \qquad (E_0)$

Una volta risolta (E_0)

se $g(x) = \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow y_p(x) = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x$

con molt. 1

ma se $\lambda = \pm 3i$ è sol^{ne} di (EA), cioè se $\lambda^2 + 9$ è un fattore del $P(\lambda)$,

$\Rightarrow y_p(x) = Ax \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x$

Se $g(x) = 5x^2 - e^x \cos x + 3x e^{-x}$

$$\Longrightarrow y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x \cos x + E e^x \operatorname{sen} x + (Fx+G) e^{-x}$$

a meno che (EA) ammetta $\lambda = 0$, $\lambda = 1 \pm i$, $\lambda = -1$ come radici.

E se la $g(x)$ è di tipo diverso?

Metodo di variazione delle costanti.

Funziona anche per eq^{ni} lineari a coeff^{ti} non costanti (purché sappiamo risolvere (E_0)).

Supponiamo che l'integrale generale di (E_0) sia

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una sol^{ne} del tipo

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + \dots + c_n(x)\, y_n(x)$$

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \qquad (E)$$

$$y'' + y = 0 \qquad (E_0) \qquad\qquad \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\Rightarrow z(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

$$\Rightarrow \text{cerco } y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x$$

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0 \qquad (E_0)$$

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x) \qquad (E)$$

$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$, dove y_1 e y_2 sono sol^{ni} di (E_0)

$$y_p'(x) = \cancel{c_1' y_1} + c_1 y_1' + \cancel{c_2' y_2} + c_2 y_2'$$

imponiamo $\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0}$

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

$$L(y_p) = y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p =$$

$$= (c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + a_1 (c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0 (c_1 y_1 + c_2 y_2) \overset{\checkmark}{=} g(x)$$

$$(c_1' y_1' + c_2' y_2') + c_1 \underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{= 0} + c_2 \underbrace{(\qquad\qquad)}_{= 0} = g(x)$$

perché y_1, y_2 sono sol^{ni} di (E_0)

Ho imposto le condizioni:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

è un sistema lineare 2x2 (con matrice dei coeff^ti non singolare)

$\forall x$ il sistema si risolve in modo unico $\Rightarrow$ troviamo $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$\Rightarrow$ Poi troviamo $c_1(x)$, $c_2(x)$ integrando

Nel nostro caso $y_1(x) = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$. $g(x) = \operatorname{tg} x$

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1' \operatorname{sen} x + c_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow c_1' = -c_2' \operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow c_2' \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + c_2' \cos x = \operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow c_2' \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \Rightarrow c_2' = \operatorname{sen} x \qquad c_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$c_2(x) = -\cos x \qquad c_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cos x$$

$\operatorname{sen} x = t$

$$= -\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1-t^2}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2}\right) dt = t - \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$C_1(x) = t - \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad t = \operatorname{sen} x$$

$$= t + \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

$$= \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

$$1 = A(1+t) + B(1-t)$$

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 1 = A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{array}$$

$$y_p(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\operatorname{sen} x =$$

$$= \left(\cancel{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\cos x - \cancel{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\cdot\cos x$$

Il metodo funziona anche per eq^{ni} lineari di ordine n, purché si sappia calcolare l'integrale generale dell'omogenea, sia esso

$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ int. generale di (E_0)

Per trovare una sol^{ne} partic. di (E), cerco una y_p della forma

$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x)$, dove $c_1, \ldots c_n$ verificano

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ si trovano $c_1', \ldots c_n'$

$\Rightarrow$ per integrazione si trovano $c_1(x) \ldots c_n(x)$ e quindi $y_p(x)$

Se l'eq^{ne} non è a coeff^{ti} costanti la risoluzione di (E_0) non è banale.
Alcuni casi si sanno risolvere.

Eq^{ni} di Eulero

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

$(x \neq 0) \Downarrow x>0$ per sempre

Idea $x = e^t$ (se $x<0$ $x=-e^t$) $\rightarrow t = \ln x$

Poniamo

$$v(t) = y(e^t) = y(x) \Longrightarrow y(x) = v(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{v'(\ln x)}{x} \Longrightarrow x y'(x) = v'(t)$$

$$y''(x) = \frac{\frac{v''(\ln x)}{x} x - v'(\ln x)}{x^2} = \frac{v''(t) - v'(t)}{x^2} \Rightarrow x^2 y''(x) = v''(t) - v'(t)$$

L'eq^{ne} diventa sempre lineare, ma a coeff^{ti} costanti $\Rightarrow$ più facile.

$$x^2 y''(x) - 2x y'(x) + \frac{5}{4} y(x) = x^\alpha \qquad \text{per } x>0. \qquad (E)$$

$$e^t = x \qquad t = \ln x$$

$$v(t) = y(e^t) \quad , \quad y(x) = v(\ln x) = v(t)$$

$$y'(x) = \frac{v'(\ln x)}{x} = \frac{v'(t)}{x}$$

$$y''(x) = \frac{v''(\ln x) - v'(\ln x)}{x^2} = \frac{v''(t) - v'(t)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad v''(t) - v'(t) - 2\, v'(t) + \frac{5}{4} v(t) = e^{\alpha t}$$

$$v''(t) - 3v'(t) + \frac{5}{4} v(t) = e^{\alpha t} \qquad (\tilde{E})$$

$$v''(t) - 3v'(t) + \frac{5}{4} v(t) = 0 \qquad (\tilde{E}_0)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda = \frac{+6 \pm \sqrt{36-20}}{4} = \frac{6 \pm 4}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

Int. generale di $(\tilde{E}_0)$: $c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{\frac{5}{2}t}$

Per cercare una sol^{ne} particolare, scelgo

$V_p(t) = Ae^{\alpha t}$ se $\alpha \neq 1/2, \frac{5}{2}$.

$V_p'(t) = \alpha A e^{\alpha t}$

$V_p''(t) = \alpha^2 A e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow \alpha^2 A - 3\alpha A + \frac{5}{4}A = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{4}} \qquad \text{C.E. } \alpha \neq \frac{1}{2}, \alpha \neq \frac{5}{2}$$

$\alpha = 1/2 \Rightarrow V_p(t) = Ate^{t/2}$

$$\Rightarrow V_p'(t) = Ae^{t/2}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \quad V_p''(t) = Ae^{t/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\right) = Ae^{t/2}\left(1 + \frac{t}{4}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(1 + \cancel{\frac{t}{4}}\right) - 3A\left(1 + \cancel{\frac{t}{2}}\right) + \cancel{\frac{5}{4}At} = 1 \Rightarrow A = -1/2$$

$\alpha = 5/2$ (per esercizio).

Sol^{ne} per $v(t)$ 1°) $\alpha \neq 1/2, 5/2$

$$v(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{5/2 t} + \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 5/4} e^{\alpha t}$$

$$y(x) = v(\ln x) = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{5/2} + \frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 5/4} x^{\alpha}$$

2°) $\alpha = 1/2$

$$v(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{5/2 t} - \frac{1}{2} t e^{t/2}$$

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{5/2} - \frac{1}{2} (\ln x) \sqrt{x}$$

3) $\alpha = 5/2$ da fare