Foglio 9 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

29 novembre 2015

9.1 Esercizio

Dato un arbitario $y_0 \in \mathbb{R}$, dimostrare che il problema di Cauchy

$$y' = t\,|y|, \quad y(0) = y_0$$

ammette un'unica soluzione, e calcolarla.

9.2 Esercizio

Trovare la soluzione dell'equazione

$$y'' \cos t + 2y' \sin t = 2\sqrt{y'}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

che verifica $y(0) = y'(0) = 1$.

9.3 Esercizio

Indicate con $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y\dfrac{1-y}{1+y^2} \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= y\dfrac{1-y}{1+y^2} \\ y(0) &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

determinare, senza risolvere i problemi, i limiti

$$\lim_{t\to-\infty} y_i(t) \qquad \lim_{t\to+\infty} y_i(t) \qquad i = 1,2$$

9.4 Esercizio

Sia $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale,

$$y' = y(1-y)(1+y)$$

diversa dalle soluzioni d'equilibrio:

- determinare le quote alle quali il grafico di $y(t)$ presenta flessi,
- esaminare per quali valori del parametro a la soluzione del problema di Cauchy

  $$y' = y(1-y)(1+y), \quad y(0) = a$$

  ammette flessi.

9.5 Esercizio

Sia assegnata l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4 + t^4}{t\,y^3} \\ y(1) = n, \quad n = 1,2,\dots \end{cases}$$

- Determinare le soluzioni $y_n(t)$ per gli $n = 1,2,3\dots$
- determinare gli intervalli in cui sono definite,
- determinare i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} y_n'(t), \quad \lim_{t\to+\infty} y_n''(t)$$

9.6 Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y' = y + t^2 y^2, \qquad y(0) = 1/2.$$

9.7 Esercizio

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y^2 - t^2 + 1$$

9.8 Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{t-y}{t+y}, \qquad y(1) = 1.$$

9.9 Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^2}{t^2 - ty}, \qquad y(1) = 2.$$

9.10 Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{2t+1}{1+t^2}y = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

9.11 Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale $y' = y\sin y$, disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni.

9.12 Esercizio

Sia $u : (a, +\infty)$ una funzione derivabile tale che esistono i limiti, finiti o infiniti,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \ell, \qquad \lim_{t\to+\infty} u'(t) = m.$$

Dimostrare che se ℓ è finito allora $m = 0$.

9.13 Esercizio

Trovare la soluzione $y(x)$ di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xy^2 - x - y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = xy^2 - x - y^2 + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

9.14 Esercizio

Trovare la soluzione $y(x)$ di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = e^x \\ y(0) = 1/2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(x) - y'(x) = \max\{e^x, e^{2x}\} \\ y(0) = 1/2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

9.15 Esercizio

Dare una formula risolutiva per l'equazione $y'' + y = \frac{1}{1+x^2}$ e mostrare che esiste una soluzione tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

9.16 Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x) + 1} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

e verificare che ha un minimo relativo in 0.

9.17 Esercizio

Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' - 2y' + y = e^x\left(3 + \frac{\log^2 x}{x}\right)$$

$$x^3y''' - 5x^2y'' + 15xy' - 20y = x^2(\ln x - 1)$$

$$x^2y'' - xy' + 2y = x^3(\ln x)^2 + \cos(\ln x^2)$$

$$y'' - 4\frac{y'}{x+1} - 2(x+1)\sqrt{y'} = 0$$

9.18 Esercizio

Al variare del parametro reale α, trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 9y(x) = 4 - 2\cos(\alpha x)$$

9.19 Esercizio

Studiare graficamente le traiettorie dell'equazione differenziale $y' = xy + 1$.

9.20 Esercizio

Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta la funzione $f(x) = 5xe^{-2x}$ tra le sue soluzioni.

9.21 Esercizio

Scrivere un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti il cui integrale generale sia

$$y(x) = 5e^{x} + c_1 e^{3x} \cos(5x) + c_2 e^{3x} \operatorname{sen}(5x)\,.$$