Studio dell'omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0 \qquad (E_0)$$

Le sol^{ni} di (E_0) costituiscono uno sp. vettoriale

$X = \{ y \in C^n(I) : y \text{ risolve } (E_0) \text{ in } I \}$ è un sottosp. vettoriale di $C^n(I)$.

Che dimensione ha X? Si dimostra che ha dim. n.

$y_1, \dots y_k \in X$ si dicono linearmente dipendenti se

$\exists$ una combinazione lineare di coeff^{ti}. non tutti nulli che fornisca il vettore nullo, cioè se $\exists\, c_1, \dots c_k$ non tutti nulli t.c.

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) \equiv 0$$

$y_1, \dots y_k$ sono linearmente indipendenti se non sono linearmente dip.

cioè se $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) \equiv 0 \implies c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$

La dimensione di uno sp. vettoriale X è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in X. Per dim che $\dim X = n$ devo trovare n vettori lin. indipendenti t.c. ogni altro vettore di X si scrive come comb^{ne} lineare dei precedenti.

I vettori $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sono le sol^{ni} dei seguenti pb. di Cauchy (fissato $x_0 \in I$)

$$\begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \dots \qquad \begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

$$y_0(x) \qquad\qquad y_1(x) \qquad\qquad\qquad y_{n-1}(x)$$

Voglio provare che: 1) $y_0(x), \dots\ y_{n-1}(x)$ sono linearmente indip.

2) ogni sol^{ne} di (E_0) si scrive come comb. lineare di $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$

Dim 1) Sia $c_0 y_0(x) + \dots + c_{n-1} y_{n-1}(x) \equiv 0 \quad (*)$ in I

$\Rightarrow$ devo provare che i coeff. sono tutti nulli.

Prendo $x = x_0$ in $(*)$

$\Rightarrow c_0 = 0$

Derivo $(*)$ $\Rightarrow c_0 y_0'(x) + \dots + c_{n-1} y_{n-1}'(x) \equiv 0$ in I

$x = x_0 \Rightarrow c_1 = 0$ e così via

$\Rightarrow$ tutti i coeff^{ti} sono nulli.

Dim 2) Sia ora $u(x)$ una qualsiasi sol^{ne} di (E_0) in I.

devo provare che $u(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_{n-1} y_{n-1}(x)$

per opportune costanti $c_0, \dots c_{n-1}$.

Prendiamo $c_0 = u(x_0)$, $c_1 = u'(x_0)$, ..., $c_{n-1} = u^{(n-1)}(x_0)$

Considero la funzione $\boxed{y(x) = c_0 y_0(x) + \ldots + c_{n-1} y_{n-1}(x)}$

Voglio provare che $u(x) \equiv y(x)$

Sia $u(x)$ che $y(x)$ verificano l'eq^{ne} (E_0)

$$y(x_0) = c_0 = u(x_0)$$

$$y'(x_0) = c_1 = u'(x_0)$$

$$---$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}(x_0)$$

Quindi $y(x)$ e $u(x)$ sono soluzioni dello <u>stesso</u> pb. di Cauchy.

Ma la soluz. del pb. di Cauchy è unica $\Longrightarrow u(x) \equiv y(x)$

$\square$

Se abbiamo un'eq^{ne} diff^{le} come (E_0) e trovo n sol^{ni} di (E_0) linearmente indipendenti, le ho trovate tutte.

La ricerca di n sol^{ni} lin. indip di E_0 è facile se i coeff^{ti} $a_0(x), a_1(x) \dots a_{n-1}(x)$ sono costanti; meno facile nel caso generale.

Consideriamo ora l'eq^{ne} non omogenea.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\,y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = g(x) \quad (E)$$

Sia $y_p(x)$ una sol^{ne} particolare di (E).

Ogni altra soluzione $y(x)$ è tale che

$y(x) - y_p(x)$ è soluzione di (E_0)

$$\Rightarrow y(x) - y_p(x) = c_0\,y_0(x) + \dots + c_{n-1}\,y_{n-1}(x)$$

$$y(x) = y_p(x) + c_0\,y_0(x) + \dots + c_{n-1}\,y_{n-1}(x) \qquad (1)$$

Abbiamo dim. che l'integrale generale di (E) è dato dalla formula (1).

Esempio:

Voglio risolvere

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E) \qquad (Ax+B)e^{2x}$$

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 0 \quad (E_0)$$

Si cercano sol^{ni} di tipo $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

(E_0) diventa $(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6)\cancel{e^{\lambda x}} \equiv 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0 \qquad \lambda = 1$$

	1	3	2	-6
1		1	4	6
	1	4	6	/

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 6)$$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4-6} = -2 \pm i\sqrt{2}$$

Ho trovato le seguenti sol^{ni}: $y_1(x) = e^x$

$$y_2(x) = e^{(-2+\sqrt{2}i)x} \qquad y_2(x) = e^{-2x}\cos(\sqrt{2}x)$$

$$y_3(x) = e^{(-2-\sqrt{2}i)x} \qquad y_3(x) = e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

sono lin. indip.

Integrale gen. di (E_0)

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}\cos(\sqrt{2}x) + c_3 e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

Ricerca della sol^{ne} particolare

Cerco una sol^{ne} particolare della forma $y(x) = (Ax+B)e^{2x}$

$$y'(x) = e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$y''(x) = e^{2x}(2A + 2A + 4Ax + 4B) = 4e^{2x}(A + Ax + B)$$

$$y'''(x) = 4e^{2x}(A + 2A + 2Ax + 2B) = 4e^{2x}(2Ax + 3A + 2B)$$

L'eq^{ne} diventa

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E)$$

$$y(x) = (Ax+B)e^{2x}$$

$$y'(x) = e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$y''(x) = e^{2x}(2A + 2A + 4Ax + 4B) = 4e^{2x}(A + Ax + B)$$

$$y'''(x) = 4e^{2x}(A + 2A + 2Ax + 2B) = 4e^{2x}(2Ax + 3A + 2B)$$ L'eq^{ne} diventa

$$y''' + 3y'' + 2y' - 6y = 5xe^{2x} \quad (E)$$

$$8Ax + 12A + 8B + 12A + 12Ax + 12B + 2A + 4Ax + 4B - 6Ax - 6B = 5x$$

$$A = \frac{5}{18}$$

$$26A + 18B = 0 \qquad B = -\frac{13}{9}A = -\frac{65}{162}$$

Quindi l'integrale generale dell'eq^{ne} (E) è:

$$y(x) = \left(\frac{5}{18}x - \frac{65}{162}\right)e^{2x} + c_1 e^{x} + e^{-2x}\left(c_2 \cos(\sqrt{2}x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$$