Equazioni di Bernoulli

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^{\alpha} \qquad \alpha \neq 0, 1$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

Poniamo $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ $\Longrightarrow z'(x) = (1-\alpha)\,y(x)^{-\alpha}\,y'(x)$

L'eq^ne diventa

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} = a(x)\,z(x) + b(x)$$

lineare!

$\Longrightarrow$ sappiamo risolverla, troviamo $z(x)$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ESEMPIO

$$y' = -3e^{3x}y - e^{6x}y^2 \qquad \text{eq}^{\text{ne}} \text{ di Bernoulli.}$$

$y \equiv 0$ è sol$^{\text{ne}}$

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{3e^{3x}}{y} - e^{6x}$$

$$z(x) = -\frac{1}{y(x)} \Rightarrow z' = \frac{y'}{y^2}$$

$$e^{3x} = t$$

$$3e^{3x}dx = dt$$

$$z' = \underbrace{+3e^{3x}}_{a(x)}z - e^{6x} \qquad \text{lineare!}$$

$$A(x) = \int a(x)dx = \int 3e^{3x}dx = e^{3x}$$

$$ke^{e^{3x}} + \frac{1}{3}(e^{3x}+1)$$

$$\parallel$$

$$z(x) = e^{e^{3x}}\left[k - \int e^{6x}e^{-e^{3x}}dx\right] = e^{e^{3x}}\left[k + \frac{1}{3}e^{-e^{3x}}(e^{3x}+1)\right]$$

$$\int e^{6x}e^{-e^{3x}}dx = \int e^{3x}e^{3x}e^{-e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\int te^{-t}dt = -\frac{1}{3}te^{-t} + \frac{1}{3}\int e^{-t} = -\frac{1}{3}e^{-t}(t+1)$$

$$z(x) = ke^{e^{3x}} + \frac{1}{3}(e^{3x}+1)$$

$$y(x) = -\frac{1}{ke^{e^{3x}} + \frac{1}{3}(e^{3x}+1)}$$ oppure $y \equiv 0$.

Eq^{ni} che si possono abbassare di ordine

$$\begin{cases} y'' = 2(1+y')^2 \\ y'(0)=0,\ y(0)=\alpha \end{cases}$$ eq^{ne} del 2° ordine

OSS non compare la y.

Trovare α in modo che la soluzione verifichi $y(-3)=5$

Si pone $z = y'$

$z' = 2(1+z)^2$ a variabili separabili

$$\Longrightarrow \int \frac{z'\,dx}{(1+z)^2} = \int 2 \Rightarrow -\frac{1}{1+z} = 2x + c \Longrightarrow 1+z = -\frac{1}{2x+c}$$

$$y' = z = -1 - \frac{1}{2x+c}$$ $\Rightarrow$ impongo $y'(0)=0$

$$0 = -1 - \frac{1}{c} \Longrightarrow c = -1$$

$$y' = -1 - \frac{1}{2x-1} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = -x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + K \xrightarrow[\text{altra c.i}]{} \alpha = K.$$

$$y(x) = -x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \alpha \xrightarrow{y(-3)=5} 5 = 3 - \frac{1}{2}\ln 7 + \alpha \Rightarrow \alpha = 2 + \frac{1}{2}\ln 7.$$

$$x^2 y' = y^2 + xy + 4x^2$$

Eq^{ni} omogenee (significato diverso da quello usato finora)

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{y^2+xy+4x^2}{x^2} \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$$

Si pone $\frac{y(x)}{x} = z(x)$

$$y(x) = x\,z(x)$$

$$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{z} + xz' = z^2 + \cancel{z} + 4$$

$$z' = \frac{z^2+4}{x}$$ variabili separabili $$\frac{z'}{z^2+4} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z^2+4} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dz}{\left(\frac{z}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\,2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z}{2}\right).$$

$$\Longrightarrow \mathrm{arctg}\,\frac{z}{2} = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$$

$$\frac{z}{\cancel{2}} = 2\,\mathrm{tg}\left(\ln(x^2)+c\right)$$

$$\Longrightarrow y = 2x\,\mathrm{tg}\left(\ln(x^2)+c\right)$$

TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE PER IL PB. DI CAUCHY.

$$(P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

1) f continua in $I \times \mathbb{R}$

2) f localmente Lipschitziana nella variabile y, cioè

$\forall\, Q = [a,b] \times [c,d] \subset I \times \mathbb{R} \quad \exists\, L_Q$ t.c. $\quad \forall x \in [a,b]$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_Q |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in [c,d]$$

<u>OSS</u> 2) è vera se $f \in C^1$

3) f a crescita lineare rispetto a y

$$|f(x,y)| \leq M(x)\,(1 + |y|) \quad \forall (x,y) \in I \times \mathbb{R}$$

$M(x)$ continua

Allora, $\forall x_0 \in I$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, $\exists!$ una sol^{ne} globale di (P), cioè definita su tutto l'intervallo I. Vera anche se $I = \mathbb{R}$.

Il precedente teorema vale anche per i sistemi.

TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE PER SISTEMI

$$(P)\ \begin{cases} Y' = F(x,Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Sia $F : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ I intervallo

1) F continua in $I \times \mathbb{R}^N$

2) F localmente Lipschitziana nella variabile Y, cioè

$\forall\, Q = [a,b] \times \overline{B_r} \subset I \times \mathbb{R}^N$ $\exists\, L_Q$ t.c. $\forall x \in [a,b]$

$$|F(x,Y_1) - F(x,Y_2)| \leq L_Q |Y_1 - Y_2| \quad \forall Y_1, Y_2 \in \overline{B_r}$$

OSS 2) è vera se $F \in C^1$

3) F a crescita lineare rispetto a Y

$$|F(x,Y)| \leq M(x)(1 + |Y|) \quad \forall (x,Y) \in I \times \mathbb{R}^N$$

$M(x)$ continua

Allora, $\forall x_0 \in I$, $\forall Y_0 \in \mathbb{R}$, $\exists!$ una sol^{ne} globale di (P), cioè definita su tutto l'intervallo I. Vera anche se $I = \mathbb{R}$.

Ricordiamo che un'eq^{ne} differenziale di ordine n

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y', y, x\right)$$

si trasforma in un sistema

$$\begin{array}{l} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \\ \dots \\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(y_n, y_{n-1}, \dots y_1, x) \end{cases}$$

Le ipotesi del thm. di esistenza globale sono verificate se la f è continua, loc. lipschitz nelle y, a crescita lineare nelle y.

In tal caso vale l'esistenza globale per il pb. di Cauchy.

TEOREMA Considero il pb. di Cauchy

$$
\begin{cases}
y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\
y(x_0) = y_0 \\
y'(x_0) = y_1 \\
\dots \\
y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{cases}
\qquad (P)
$$

Se f è $C^1(I \times \mathbb{R}^n)$ e $|f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})| \leq M(x)(1 + |y| + |y'| + \dots + |y^{(n-1)}|)$

$\Rightarrow$ allora $\exists!$ sol^{ne} di (P) definita su tutto P.

Vero in particolare se f è lineare nelle $y^{(k)}$

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) + g(x)$$

e le funzioni $a_0(x), a_1(x), \dots a_{n-1}(x), g(x)$ sono continue in I.

EQ$^{\text{ni}}$ LINEARI

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = g(x) \qquad (E)$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = 0 \qquad (E_0)$$

eq$^{\text{ne}}$ omogenea associata.

<u>OSS</u> Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due sol$^{\text{ni}}$ di (E), allora la loro differenza è sol$^{\text{ne}}$ di (E_0)

Si chiamano lineari perché l'operatore $L : C^n(I) \to C^0(I)$

$$y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$$

è lineare, cioè

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$L(\alpha y) = \alpha L(y)$$

Studio dell'omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0 \qquad (E_0)$$

Le sol^{ni} di (E_0) costituiscono uno sp. vettoriale

$X = \{ y \in C^n(I) : \; y \text{ risolve } (E_0) \text{ in } I \}$ è un sottosp. vettoriale di $C^n(I)$.

Che dimensione ha X? Si dimostra che ha dim. n.

$y_1, \ldots y_k \in X$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists$ una combinazione lineare di coeff^{ti} non tutti nulli che fornisca il vettore nullo, cioè se $\exists\, c_1, \ldots c_k$ non tutti nulli t.c.

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x) \equiv 0$$

$y_1, \ldots y_k$ sono linearmente indipendenti se non sono linearmente dip.
cioè se $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x) \equiv 0 \implies c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$

La dimensione di uno sp. vettoriale X è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in X. Per dim che $\dim X = n$ devo trovare n vettori lin. indipendenti t.c. ogni altro vettore di X si scrive come comb^{ne} lineare dei precedenti.

I vettori $y_1(x), \dots y_n(x)$ sono le sol^{ni} dei seguenti pb. di Cauchy (fissato $x_0 \in I$)

$$\begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \cdots \qquad \begin{cases} (E_0) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1(x) \qquad\qquad y_2(x) \qquad\qquad y_n(x)$$