TEOREMA DI CAUCHY (Esistenza e unicità in piccolo).

$$(P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \qquad I = [x_0 - a, x_0 + a],\ J = [y_0 - b, y_0 + b]$$

1) f continua in $I \times J$

2) f lipschitziana rispetto alla y, unif.^{te} in x.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2 \in J.$$

Allora $\exists$ intervallo $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$, ed $\exists !$ $y \in C^1(I_0; J)$ sol^{ne} di (P).

Idea della dim.

1) riduzione ad un problema integrale.

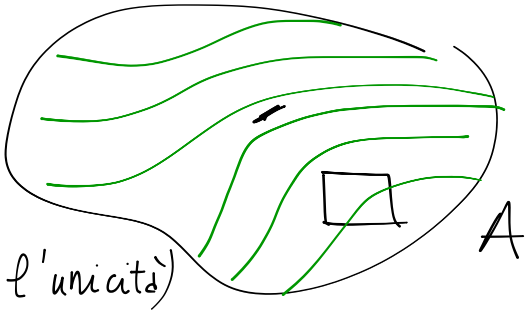
2) uso del teorema delle contrazioni (Analisi Funzionale) per risolvere il pb. integrale.

Soluzioni di un'eq^{ne} diff^{le}

$y' = f(x,y)$ $\qquad$ $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aperto

Supponiamo che $f(x,y)$ verifichi le ipotesi 1) e 2) in ogni rettangolo chiuso contenuto in A

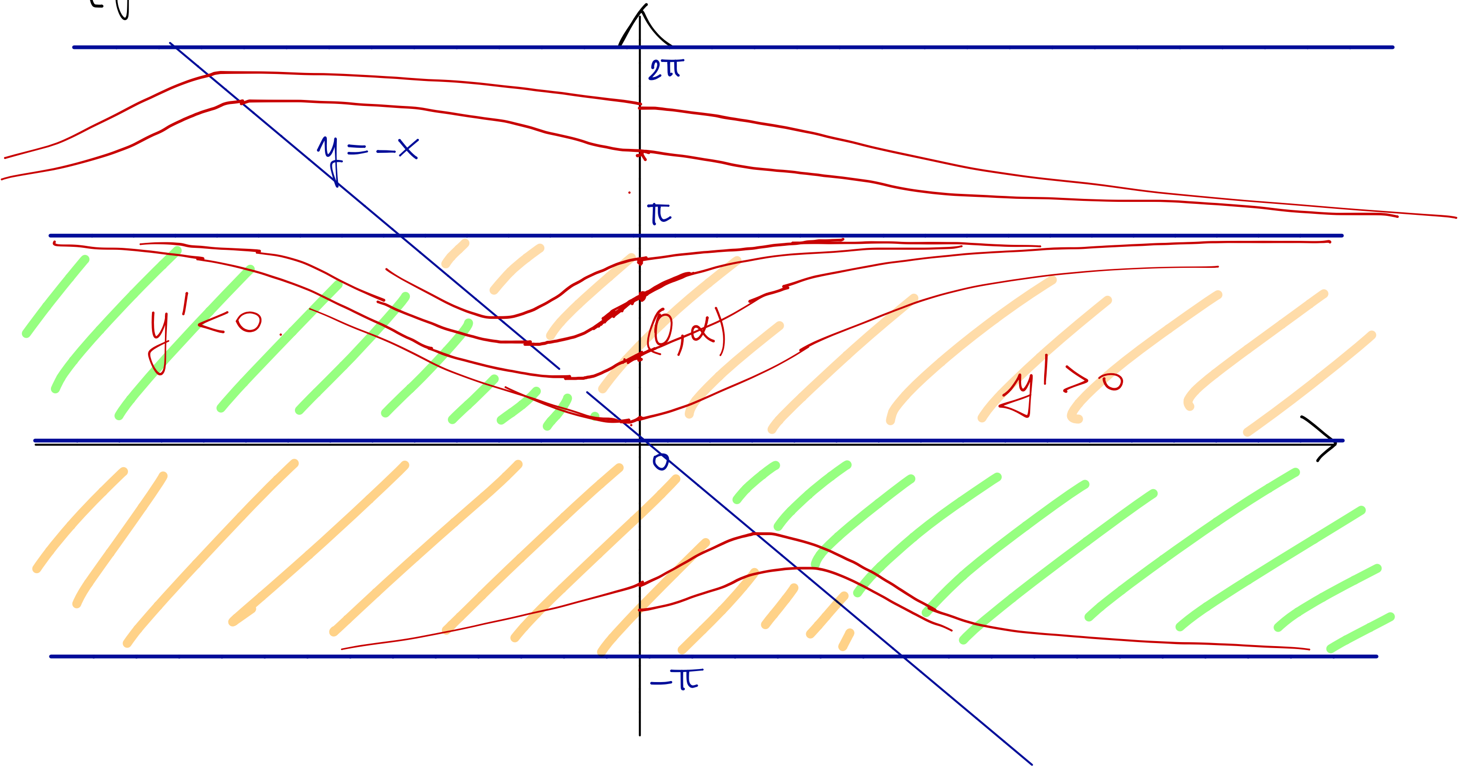
Per esempio, questo è vero se $f(x,y) \in C^1(A)$



Il teorema di Cauchy ci dice che per ogni punto $(x_0,y_0) \in A$ passa una e una sola curva grafico di una sol^{ne}. Due di tali curve non si intersecano mai (verrebbe meno l'unicità)

Analisi qualitativa delle soluzioni di un'eq^{ne} diff^{le} del 1° ordine

$$\begin{cases} y' = (x+y)\,\mathrm{sen}\, y \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad f(x,y) = (x+y)\,\mathrm{sen}\, y \in C^1(\mathbb{R}^2)$$



Cerco le sol^{ni} costanti: $y(x) \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Se $\alpha = k\pi$, il pb. è risolto.

Studiamo il segno di y', cioè il segno di $f(x,y) = (x+y)\,\text{sen}\, y$.

Se $\alpha \in (0,\pi)$, la sol^{ne} è crescente in $[0,+\infty)$, ma non può raggiungere π (unicità)

La sol^{ne} è definita in tutto $[0,+\infty)$, ammetterà limite finito per $x \to +\infty$

Due possibilità: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lambda \in (0,\pi)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \pi^-$

Se valesse 1), $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x+y(x))}_{+\infty}\, \underbrace{\text{sen}(y(x))}_{\text{sen}\,\lambda > 0} = +\infty$ Assurdo perché $y(x)$ limitata.

$\longrightarrow$ vale 2)

Analogamente, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \pi^-$

Volendo, potremmo studiare le concavità e le convessità

<u>OSS</u> $y \in C^1 \underset{\text{dall'eq}^{ne}}{\Longrightarrow} y \in C^2 \Longrightarrow y \in C^3 \Longrightarrow$

$y \in C^\infty(\mathbb{R})$

Questo è un teorema:

Se $y(x)$ è una sol^{ne} C^1 di $y' = f(x, \underset{\Leftarrow C^1}{y})$, e se $f \in C^k(A)$

$\Longrightarrow y(x) \in C^{k+1}(I)$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[(y+x)\,\mathrm{sen}\,y\right] = \mathrm{sen}\,y + (\mathrm{sen}\,y)y' + (y+x)\cos y \; y' =$$

$$= \mathrm{sen}\,y + (\mathrm{sen}\,y + (y+x)\cos y)\,(x+y)\,\mathrm{sen}\,y.$$

$\Longrightarrow$ si possono in teoria trovare le regioni dove y è concava, dove è convessa, etc...

TEOREMA DI PEANO

Se nel teorema di Cauchy conservo l'ipotesi 1) di continuità di f ma sopprimo la lipschitzianità 2)

$\Longrightarrow \exists$ una sol^{ne} $y(x)$ di (P) definita sull'intervallo I_0 ma non è unica.

ESEMPIO:
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una sol^{ne} è $y \equiv 0$

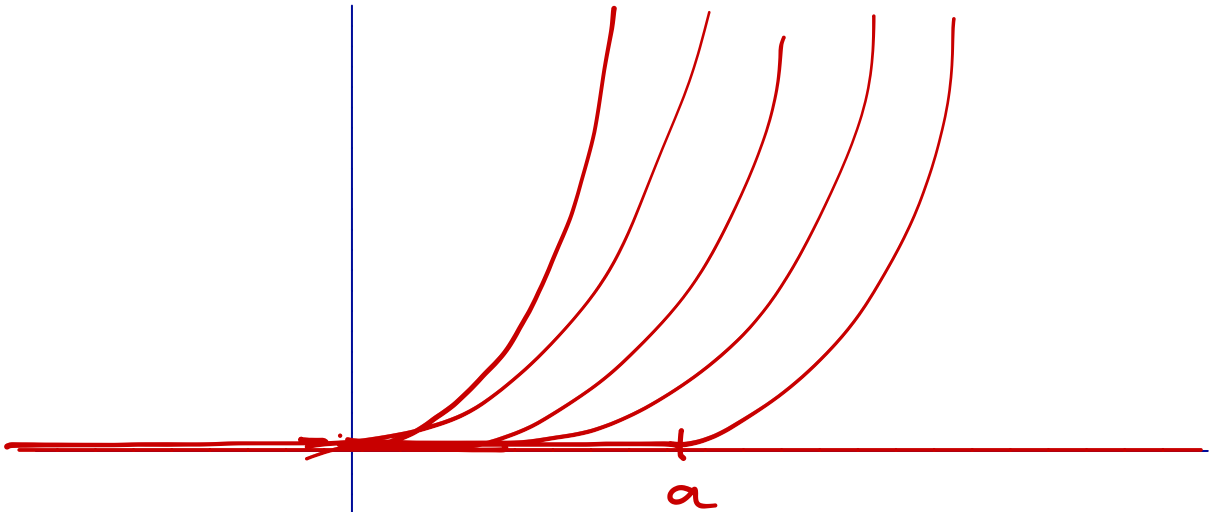
Ce ne sono altre? L'eq^{ne} è a variabili separabili

$$\int \frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = \int 1 \Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = x + c$$

$y = \left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{3/2}$ se prendo $c=0$, passa per $(0,0)$

$y = \left(\frac{2}{3} x\right)^{3/2}$ è sol^{ne} in $[0,+\infty)$

La funzione $y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} x\right)^{3/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ è una sol^{ne} $C^1(\mathbb{R})$



Anche $y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(x-a)\right)^{3/2} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$

Problemi di Cauchy per eq^{ni} di ordine superiore

$$y'' = f(x, y, y')$$

Esempio:

$$y'' = xy + (y')^2$$

Lo trasformo in un sistema

$$y'(x) = v(x)$$

$$v'(x) = f(x, y, v) = xy + v^2$$

Analogamente un'eq^{ne} di ordine n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

si trasforma così:

$$y_0(x) = y(x)$$
$$y_1(x) = y'(x) = y_0'(x)$$
$$y_2(x) = y''(x) = y_1'(x)$$
$$\dots$$
$$y_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Questo sistema si può scrivere in forma vettoriale.

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \quad \cdots \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

$$\underline{Y}(x) = (y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Il sistema si scrive come $\boxed{\underline{Y}'(x) = \underline{F}(x, \underline{Y})}$

$$\underline{F} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \begin{cases} F_0(x, \underline{Y}) = y_1 \\ F_1(x, \underline{Y}) = y_2 \\ \quad \cdots \\ F_{n-1}(x, Y) = f(x, y_0, y_1, \dots y_{n-1}) \end{cases}$$

La cond^{ne} iniziale appropriata è $\underline{Y}(x_0) = \underline{Y}^0 = (y_0^0, y_1^0, \dots y_{n-1}^0)$

che corrispondono a

$$y(x_0) = y_0(x) = y_0^0$$
$$y'(x_0) = y_1^0$$
$$\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0$$

Abbiamo trovato una corrispondenza tra il pb. di Cauchy di ordine n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_1^0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

e il pb di Cauchy vettoriale ma di ordine 1

$$\begin{cases} \underline{Y}' = \underline{F}(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x_0) = \underline{Y}^0 \end{cases}$$

Il teorema di Cauchy vale formalmente come prima.

TEOREMA (P) $\begin{cases} \underline{Y}' = \underline{F}(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x_0) = \underline{Y}_0 \end{cases}$ $I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$J = \{ \underline{Y} \in \mathbb{R}^N : \| \underline{Y} - \underline{Y}_0 \| \leq b \}$

$\underline{F} : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificante

1) $\underline{F}$ continua in $I \times J$.

2) $\underline{F}$ Lipschitz rispetto a Y

equivale alla Lipschitzianità delle singole componenti.

$$\| \underline{F}(x, \underline{Y}_1) - \underline{F}(x, \underline{Y}_2) \| \leq L \| \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2 \| \quad \forall x \in I, \ \forall \underline{Y}_1, \underline{Y}_2 \in J$$

Allora $\exists\, I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ed $\exists !$ sol^{ne} $\underline{Y}(x) : I_0 \longrightarrow J$ C^1 sol^{ne} di (P).

Dim. identica.

Conseguenza

Se considero il pb. di Cauchy di ordine n.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

con f (per esempio) di classe C^1 in un intorno di $(x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1})$

$\Rightarrow \exists!$ la sol^ne in piccolo

TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE ("in grande")

Lo scrivo nel caso di un equazione, ma vale tale e quale per i sistemi

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

I intervallo contenente x_0

Ipotesi su f:

1) f continua in $I \times \mathbb{R}$
2) f localm Lipschitz rispetto a y. $\forall Q = [a,b] \times [c,d] \subset I \times \mathbb{R}$ $\exists L_Q$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_Q |y_1 - y_2| \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in [c,d].$$

3) Crescita lineare rispetto a y. $\exists M(x)$ continua in I

$$|f(x,y)| \leq M(x)(1+|y|) \qquad \forall x \in I, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Allora $\exists!$ $y(x) \in C^1(I)$ sol^{ne} di (P).

Per es.

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}^2(x+e^x y^2)\, y + 3x^4 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

ha sol^{ne} globale su $\mathbb{R}$.

La cond. 3) è vera perché

$$|f(x,y)| \leq |y| + 3x^4 \leq$$

$$\leq \underbrace{(1+3x^4)}_{M(x)}(|y|+1)$$