Problema di Cauchy per le eq^{ni} differenziali (del 1° ordine)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P) \qquad f : \underset{\text{aperto}}{A} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

Una soluzione di (P) è una funzione $y(x) \in C^1(I)$, dove I è un intervallo contenente x_0,

$\forall x \in I \quad (x, y(x)) \in A$ e l'eq^{ne} deve essere vera $\forall x \in I$

e deve essere $y(x_0) = y_0$

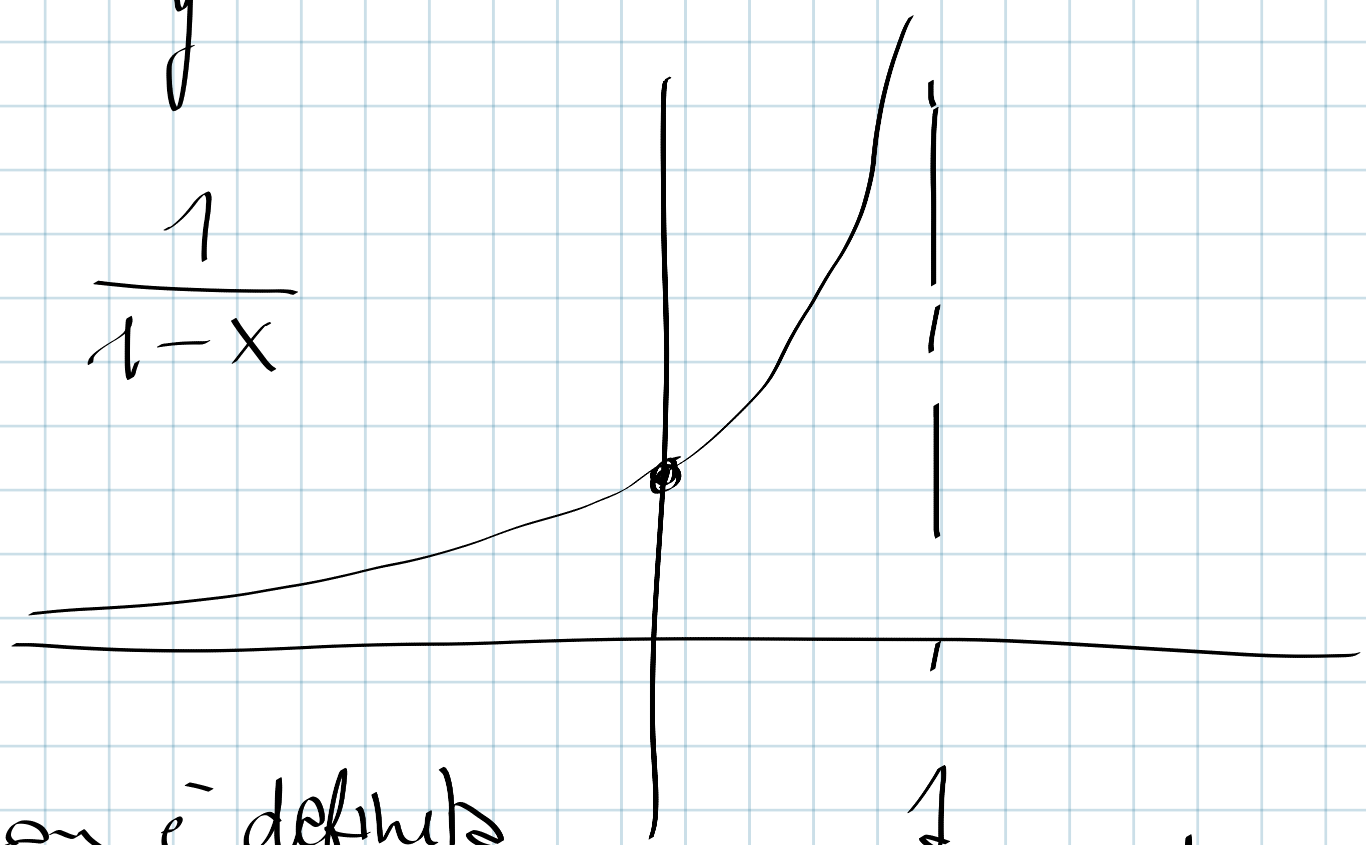
Vedremo che, sotto ipotesi molto generali su f, il problema (P) ammette una e una sola soluzione, almeno in un "piccolo" intervallo aperto contenente x_0

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{y^2} = \int 1 \implies -\frac{1}{y} = x + c \overset{\text{C.I.}}{\implies} c = -1$$

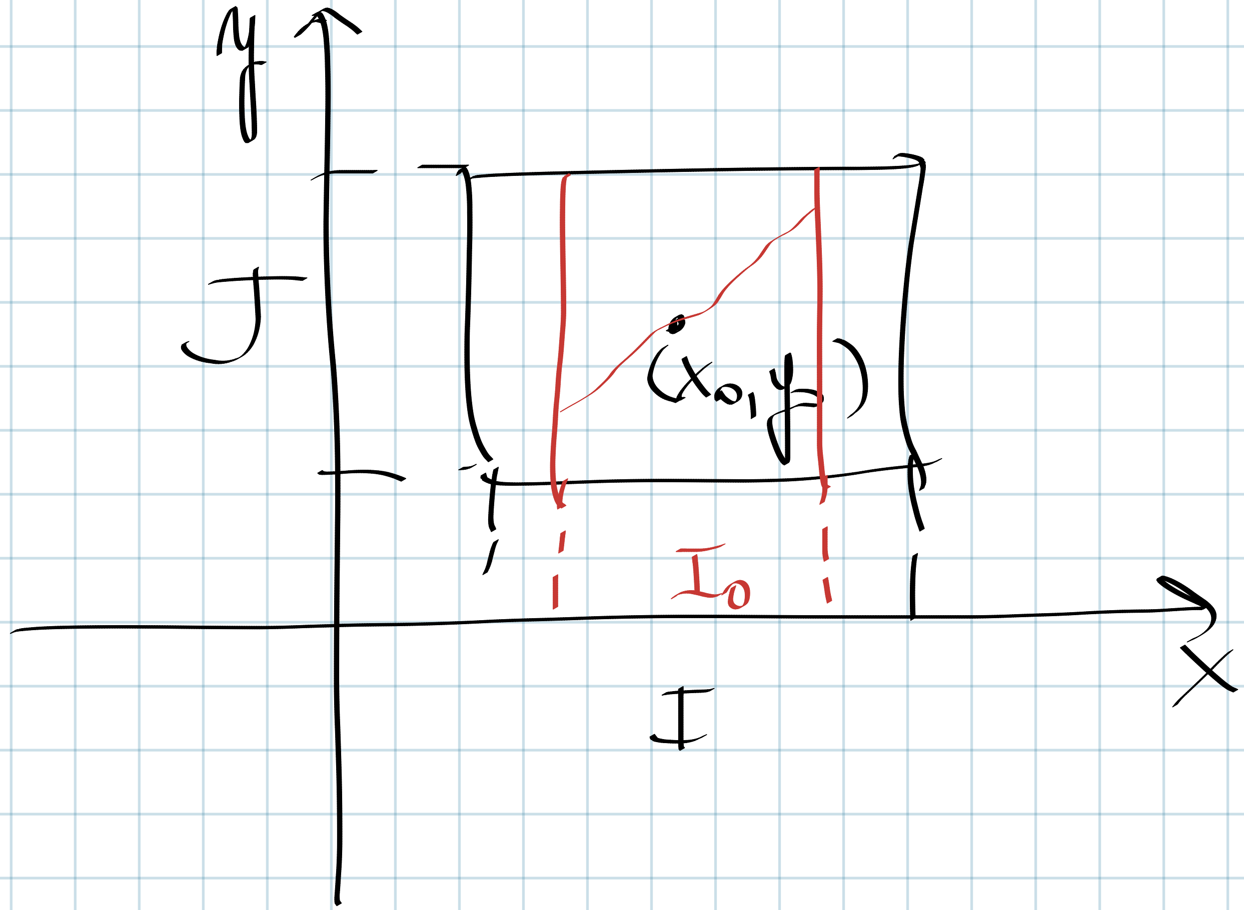
$$y = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$



OSS La soluzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$ (non è globale)

In generale, quindi, c'è solo da aspettarsi esistenza "locale" di una sol^{ne}.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P)$$



$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$

dove $I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$J = [y_0 - b, y_0 + b]$

per qualche $a, b > 0$

<u>Ipotesi su f</u>

1) f continua in $I \times J$ (quindi limitata per Weierstrass)

2)

Ipotesi su f

1) f continua in $I \times J$ (quindi limitata per Weierstrass)
(unif.te rispetto a x)

2) f Lipschitziana rispetto alla variabile y, cioè

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2 \in J$$

Ricordiamo che in 1 variabile 1 funzione $\varphi(t)$ si dice Lipschitziana nell'intervallo J se $\exists\, L \geq 0$ t.c.

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in J$$

Esempio: le funzioni C^1 in $J = [\alpha, \beta] \Rightarrow$ la derivata prima è limitata

Esempi di funzioni non Lipschitz:

$$\varphi(t) = t^2 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \quad \text{in } (0,1)$$

$$\varphi(t) = \sqrt{t} \quad \text{in } [0,1]$$

Per esempio, le ipotesi 1) e 2) sono vere se

$$f \in C^1(I \times J)$$

// L perché $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua in $I \times J$ chiuso e limitato

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\right| |(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

basta $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(I \times J)$.

TEOREMA DI CAUCHY – Esistenza e unicità locale (in piccolo)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (P)$$

$I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$J = [y_0 - b, y_0 + b]$

Ipotesi su f

1) f continua in $I \times J$ (quindi limitata per Weierstrass)
(unif.te rispetto a x)
2) f Lipschitziana rispetto alla variabile y, cioè

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in J$$

Allora $\exists\ \delta \le a$ t.c. detto $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
$\exists!$ soluzione $y(x) \in C^1(I_0; J)$ del pb. (P).

DIVAGAZIONE SUGLI SPAZI METRICI

Sia (X, d) uno spazio metrico.
(X,d) si dice <u>completo</u> se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

<u>**DEF**</u> Una funzione $f: X \to X$ si dice una contrazione se $\exists\, \alpha < 1$ t.c.

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$$

<u>OSS</u> ne segue che se $x_n \to x$ $f(x_n) \to f(x)$

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia X uno spazio metrico completo, e sia $f: X \to X$ una contrazione. Allora $\exists!$ $x \in X$ t.c. $x = f(x)$

In altre parole: f ammette un unico pto fisso.

Il teorema delle contrazioni si può usare anche in $\mathbb{R}$ (che, dotato dell'ordinaria metrica euclidea, è uno sp. metrico completo.

Esempio: Vogliamo risolvere l'eq^{ne} $x = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

La funzione $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ è una contrazione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Infatti

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| = \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right||x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

Pertanto $\exists !$ la soluzione di $x = \cos\frac{x}{2}$.

Non solo, ma il teorema (vedi dim. dopo) suggerisce un modo per approssimare (per es. con un computer) la soluzione.

Dim Sia $x_0 \in X$.

Poniamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ ... $x_{k+1} = f(x_k)$

Ho costruito una successione a valori in X.

Dimostro che $\{x_k\}$ è una succ^ne^ di Cauchy, cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n, m > \bar{n}$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha \, d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha \, d(x_2, x_1) \leq \alpha^2 d(x_1, x_0)$$

$$\text{-- --}$$

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$$

Siano $n < m = n + p \qquad p \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots \alpha^{n+p-1} \right) d(x_1, x_0)$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k \right) d(x_1, x_0) <$$

$$< \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k \right) d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

quindi è $< \varepsilon$ se $n > \bar{n}$

$\Rightarrow$ la succ^{ne} è di Cauchy
lo spazio è completo $\Big\} \Rightarrow$ $\exists\, x \in X$ t.c. $x_n \to x$

nel senso che $d(x_n, x) \to 0$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & f(x) \end{array}$$

passiamo al limite per $n \to \infty$

perché f è continua.

$\Rightarrow \exists$ pto fisso

L'unicità segue dal fatto che se ci avessero due pti fissi

$x = f(x)$

$y = f(y)$

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \quad \text{ma } \alpha < 1$$

$$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \quad \square$$

Dim. del teorema di Cauchy

Step 1. Ci si riconduce ad un problema "integrale"

$$(P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y \in C^1(I_0)$ sol^{ne} di (P) $\Longleftrightarrow$ $\boxed{y \in C(I_0) \text{ sol}^{ne} \text{ di } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt}$

da fissare

$\boxed{\Longrightarrow}$ $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

$\boxed{\Longleftarrow}$ se $y(x)$ è soluzione continua del probl. integrale

$\Rightarrow$ y è derivabile, $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = 0$

Sto cercando di dim. che $\exists !$ y sol^{ne} continua in I_0 di

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, δ da scegliere

$X = C(I_0, J) = \{ y(x) : I_0 \to \mathbb{R}$ continue e t.c

$$y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b \}$$

con la distanza

$$d(y, w) = \max_{x \in I_0} |y(x) - w(x)|$$

Sappiamo che $C(I_0; \mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo

Sia $\{y_n\}$ una succe^{ne} di Cauchy in $X \Rightarrow$ è di Cauchy in

$C(I_0; \mathbb{R}) \xRightarrow{\text{completo}} \exists\, y(x) \in C(I_0; \mathbb{R})$ t.c

$y_n \to y$ uniformemente

D'altra parte, se $y_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b] \Rightarrow$

$y(x) \in [y_0 - b, y_0 + b] \Rightarrow y \in J$

$y_n \to y$ in $J \Rightarrow X$ è completo

Considero l'operatore $T: X \to X$;

$$y \mapsto T(y)$$

$$(T(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Devo verificare che

1) $T: X \to X$ | qui sceglierò δ
2) T è una contrazione

$\Rightarrow \exists!$ un pto fisso di T, cioè una funzione continua t.c

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

Dim 1)

$(T(y)) \in C(I_0 ; \mathbb{R})$ ovvio

Devo verificare che $T(y) \in C(I_0, J)$, cioè che

$$|T(y)(x) - y_0| \le b \quad , \text{ cioè}$$

$$\left| \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt - \cancel{y_0} \right| \le b$$

f continua in $I \times J$
$\longrightarrow |f(x,y)| \le M$

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \right| \le M |x - x_0| \le$$
$$\le \delta M \le b$$

Scelgo $\delta \le \frac{b}{M}$

Dim 2) $\forall y, w \in X \quad d(T(y), T(w)) \le \alpha\, d(y, w)$

con $\alpha < 1$

$$(T(y))(x) - (T(w))(x) = \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt - \cancel{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(t, w(t))\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y(t)) - f(t, w(t)) \right] dt$$

$$|T(y)(x) - T(w)(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, w(t)) \big)\, dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, w(t))|\, dt \right| \overset{\text{Lipschitz}}{\le} L \int_{x_0}^{x} |y(t) - w(t)|\, dt$$

$\le$

$$|T(y)(x) - T(w)(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, w(t)) \big)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, w(t))|\, dt \right| \overset{\text{Lipschitz}}{\leq} L \int_{x_0}^{x} \underbrace{|y(t) - w(t)|}_{\leq\, d(y,w)}\, dt$$

$$\leq L\, |x - x_0|\, d(y, w) \leq L\delta\, d(y, w) \qquad \forall x \in I_0$$

$$\underbrace{\sup_{x \in I_0} |T(y)(x) - T(w)x|}_{=\, d(T(y), T(w))} \leq \underbrace{L\delta}_{<\, 1}\, d(y, w)$$

se scelgo $\delta < \frac{1}{L}$

alla fine scelgo $\delta < \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{L}, a\right\}$