UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
- Facoltà di Farmacia e Medicina -
Corso di Laurea in CTF

# 1 REGOLE DI DERIVAZIONE

Prima di tutto ricordiamo che la derivata di una funzione $f$ in $x$ è il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, ossia

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

purché tale limite del rapporto incrementale esista finito.
Se la funzione $f$ è derivabile in $x$ allora la funzione è continua in $x$: infatti deve essere necessariamente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}'' = \frac{0}{0}''$$

ossia se tale limite non fosse del tipo $''\frac{0}{0}''$ allora il limite del rapporto incrementale non potrebbe esistere ed essere finito, o meglio, per $\Delta x$ che tende a zero

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \underbrace{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{\text{converge a } f'(x)} \underbrace{\Delta x}_{\text{tende a zero}}$$

| REGOLE DI DERIVAZIONE: $f$ e $g$ derivabili |
|---|
| $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x), \qquad$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ |
| $\left(f^{-1}\right)'(x) =, \left.\frac{1}{f'(y)}\right\rvert_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ se $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ |

Alcune regole di derivazione vengono dalle analoghe regole per i limiti:

**REGOLA 1: derivata di $\alpha f$, con $\alpha$ costante**

$$\frac{d(\alpha f)}{dx}(x) = \alpha f'(x), \qquad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

discende dal fatto che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) - \alpha f(x)}{\Delta x} = \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**REGOLA 2: derivata della somma**

Analogamente, se $f$ e $g$ sono derivabili in $x$ allora

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

che discende dal fatto che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - [f(x)+g(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Le prossime regole discendono invece da semplici passaggi che permettono di riscrivere opportunamente il rapporto incrementale:

**REGOLA 3: derivata del prodotto**

Se $f$ e $g$ sono derivabili in $x$ allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

che discende dal fatto che

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

**REGOLA 4: derivata del reciproco**

Se $g$ è derivabile in $x$ e $g(x) \neq 0$, allora

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

che discende dal fatto che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) g(x)\, \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{1}{g(x+\Delta x) g(x)} \, \frac{-[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right]$$

$$= -\frac{1}{g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

**REGOLA 5: derivata del rapporto**

Se $f$ e $g$ sono derivabili in $x$ e $g(x) \neq 0$, allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

che discende dalle regole 3 e 4:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \, \frac{1}{g}\right)'(x)$$

che,per la regola della derivata del prodotto, coincide con

$$= f'(x) \, \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g}\right)'(x)$$

che, per la regola della derivata del reciproco, coincide con

$$= f'(x) \, \frac{1}{g(x)} - f(x) \, \frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**REGOLA 6: derivata della funzione inversa**

Se $f$ è derivabile ed invertibile, con funzione inversa $f^{-1}$, e se $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, allora

$$\left(f^{-1}\right)'(x) =, \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

che viene giustificata da 1) la derivata della funzione inversa esiste:
il grafico della funzione inversa è ottenuto dal grafico della funzione $f$ per riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e dall'interpretazione della derivata come coefficiente angolare della retta tangente
2) espressione della derivata della funzione inversa

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

e quindi da una parte

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1})(x) = \frac{d}{dx} x = 1$$

e dall'altra per la regola della derivazione della funzione composta, con $g = f^{-1}$ (stiamo dando per scontato che la derivata di $f^{-1}$ esiste)

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1})(x) = f'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

e quindi

$$1 = f'(f^{-1}(x))\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$$

da cui, ricordando che $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

APPLICAZIONI: per le regole 1-5 rimandiamo ai classici libri di testo e agli appunti della Prof.ssa Anna Torre, nel seguito ci concentriamo sull'applicazione della regola della derivata della funzione inversa, ma usiamo anche le altre regole di derivazione.
NON E' NECESSARIO STUDIARE A MEMORIA LE DIMOSTRAZIONI, MA SEGUIRE IL METODO PERMETTE DI CAPIRE COME SI USA LA REGOLA DELLA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA, E SI RICHIAMANO ALCUNE PROPRIETA' DELLE FUNZIONI ESPONENZIALI E TRIGONOMETRICHE, CHE POSSONO ESSERE MOLTO UTILI PER RISOLVERE ALCUNI ESERCIZI.

**ESEMPIO 1**

$$\boxed{\text{Derivata di } f(x) = a^x, \text{ (con } a > 0) \text{ e della sua inversa } f^{-1}(x) = \log_a(x).}$$

Otterremo che $\boxed{\dfrac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x,\ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \log_a(e)\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\ln(a)\,x},\ \ x \in (0,\infty),}$

ed in particolare $\boxed{\dfrac{d}{dx}e^x = e^x,\ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).}$

Prima di tutto osserviamo che la derivata di $f(x) = a^x$ è del tipo

$$\frac{d}{dx}a^x = C(a)a^x, \qquad \text{dove } C(a) \text{ coincide con la derivata in } x = 0,$$

INFATTI:

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

e il rapporto incrementale si può scrivere come

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

da cui,

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x\ = a^x C(a)$$

dove si è posto

$$C(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Nel caso in cui $a = e$, il numero di Eulero (o anche detto numero di Nepero) sappiamo che vale il seguente limite notevole (senza dimostrazione):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Inoltre, usando il fatto che, per ogni $t$ reale

$$a^t = \left(e^{\ln(a)}\right)^t = e^{t\ln(a)}$$

possiamo notare che

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x\,\ln(a)} - 1}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x\,\ln(a)} - 1}{\Delta x\,\ln(a)}\,\ln(a)$$

e quindi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln(a)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\,\ln(a)}-1}{\Delta x\,\ln(a)}=\ln(a)\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln(a)1=\ln(a)$$

Per calcolare la derivata di $\log_a(x)$ dobbiamo pensare che posto $\boxed{f(x)=a^x}$ si ha $\boxed{f^{-1}(x)=\log_a(x)}$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_a(x)&=\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)}\\&=\left.\frac{1}{a^y\ln(a)}\right|_{y=\log_a(x)}=\frac{1}{a^{\log_a(x)}\ln(a)}\\&=\frac{1}{x\ln(a)}=\frac{\log_a(e)}{x}\end{aligned}$$

dove ricordiamo che l'ultima uguaglianza dipende dal fatto che[1]

$$\log_a(b)\log_b(a)=1,\qquad \text{per ogni } a \text{ e } b \text{ strettamente positivi.}$$

**ESEMPIO 2**

$\boxed{\text{Derivate di } \cos(x),\ \sin(x) \text{ e delle loro inverse } \arccos(x) \text{ e } \arcsin(x)}$

Otterremo

$$\boxed{\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)\qquad \frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x),\qquad x\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arccos(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \frac{d}{dx}\arcsin(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in(-1,1)}$$

$\boxed{\text{ATTENZIONE: le due funzioni precedenti non sono derivabili in } x=\pm 1.}$

INFATTI

usando i due limiti notevoli

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

[1] La formula $\log_a(b)\log_b(a)=1$ si ricava, ad esempio, dalla formula $\log_a(c)=\log_a(b)\log_b(c)$, che, nel caso $c=a$ diventa $\log_a(a)=1=\log_a(b)\log_b(a)$,
oppure direttamente,
posto $\alpha=\log_b(a)$ ossia $a=b^\alpha$ e $b=a^\beta$, allora

$$b^{\alpha\beta}=(b^\alpha)^\beta=a^\beta=b=b^1$$

e quindi gli esponenti $\alpha\beta$ e 1 sono uguali.

otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} &= \frac{\cos(x)\cos(\Delta x)-\sin(x)\sin(\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \cos(x) \underbrace{\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}}_{\text{tende a 0 per } \Delta x \to 0} - \sin(x) \underbrace{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\text{tende a 1 per } \Delta x \to 0}
\end{aligned}$$

da cui si ottiene che

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = -\sin(x).$$

Per ottenere la derivata di $\sin(x)$ si può procedere o in modo analogo, oppure, ricordando che $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)$, ed usando la regola della derivata della funzione composta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{d}{dx}\cos(y)\Big|_{y=\frac{\pi}{2}-x} \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin(\frac{\pi}{2}-x)\,(-1) \\
&= \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Per ottenere le derivate delle funzioni inverse $\arccos(x)$ e $\arcsin(x)$ basta utilizzare la regola della derivata della funzione inversa: posto $f(x) = \cos(x)$ e $f^{-1}(x) = \arccos(x)$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{-sin(y)}\Big|_{y=\arccos(x)}$$

Per trovare il valore di $\sin(y)$ quando $y = \arccos(x)$ dobbiamo osservare che

$$y = \arccos(x) \quad \text{se e solo se} \quad \cos(y) = x$$

e inoltre

$$\sin^2(y)+\cos^2(y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(y) = 1-\cos^2(y) \Leftrightarrow \sin(y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(y)}$$

e quindi, tenuto conto del fatto che $\cos(y) = x$,

$$\sin(y) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

**Come scegliere il segno?**

Ci sono due modi per decidere che bisogna scegliere $\sin(y) = +\sqrt{1-x^2}$:

1) basta osservare che la funzione $\cos(x)$ nell'intervallo $[0,\pi]$ nella quale viene invertita è decrescente (parte dal valore 1 in 0, fino ad arrivare a $-1$ in $\pi$) e quindi lo è anche la funzione inversa $\arccos(x)$ e quindi la derivata di $\arccos(x)$ non può essere positiva;

2) sappiamo che $y$ deve appartenere a $[0,\pi]$ e $\sin(y) \geq 0$ per ogni $y \in [0,\pi]$.

Riassumendo

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sin(y)}\Big|_{y=\arccos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

OVVIAMENTE è necessario che il denominatore sia diverso da zero e quindi la derivata esiste solo per $x \in (-1,1)$.

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(y)}\bigg|_{y=\arcsin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Va osservato che, poiché la funzione $\sin(x)$ è crescente nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, anche la sua inversa $\arcsin(x)$ è crescente in $[-1,1]$ e quindi la sua derivata non può essere negativa.

**ESEMPIO 3**

$\boxed{\text{Derivata della funzione } \tan(x) \text{ e della sua inversa } \arctan(x)}$

Otterremo che $\boxed{\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{cos^2(x)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}}$

INFATTI

usando la regola della derivata del rapporto con $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{cos^2(x)}\end{aligned}$$

ed usando la regola della funzione inversa per $f(x) = \tan(x)$ e $f^{-1}(x) = \arctan(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(y)}\bigg|_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}}\bigg|_{y=\arctan(x)} \\ &= \cos^2(y)\big|_{y=\arctan(y)}\end{aligned}$$

A questo punto dobbiamo trovare quanto vale $\cos(y)$ quando $y = \arctan(x)$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ossia quando

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = x.$$

Osserviamo che $\cos(y) > 0$ per ogni $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e del resto dobbiamo trovare $\cos^2(y)$ e quindi è equivalente chiedere

$$\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2(y) = \cos^2(y)x^2$$

ossia SE E SOLO SE

$$1 = \cos^2(y)(1+x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

e riassumendo

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \cos^2(y)\bigg|_{y=\arctan(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

IN QUESTA PARTE SI DISCUTE UN ESERECIZIO DELL'ESERCIZIARIO E SE NE PROPONE UNA MODIFICA INTERESSANTE

**D. 4 FOGLIO 5** Un polinomio di terzo grado, **il cui grafico** passa per il punto $(1,1)$ e ammette ivi un estremo. È tale che $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$, si sa inoltre che il coefficiente del termine di grado massimo è positivo. Tale funzione:

**4A** interseca l'asse $x$ in un ulteriore punto di ascissa negativa

**4B** interseca l'asse $x$ in altri due punti

**4C** ammette un punto di minimo nel terzo quadrante

**4D** può intersecare l'asse $x$ solo in punti di ascissa positiva

**4E** i dati non sono sufficienti per rispondere

**VARIANTE D.4** Un polinomio di terzo grado passa per il punto $(1,1)$ e ammette ivi un estremo. È tale che $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$. Trovare esplicitamente il polinomio.

DISCUSSIONE

Dal punto di vista qualitativo sappiamo che un polinomio di terzo grado

$$f(x) = P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

è definito su tutto $\mathbb{R}$.

I limiti per $x$ che tende a $+\infty$ e a $-\infty$ si possono calcolare facilmente: prima di tutto si osserva che

$$f(x) = P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3\big(1 + b\,\frac{1}{x} + c\,\frac{1}{x^2} + d\,\frac{1}{x^3}\big)$$

e quindi, se $a > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\Big[ax^3\,\big(1 + b\,\frac{1}{x} + c\,\frac{1}{x^2} + d\,\frac{1}{x^3}\big)\Big]\\
&= \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} ax^3}_{=\pm\infty}\ \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\big(1 + b\,\frac{1}{x} + c\,\frac{1}{x^2} + d\,\frac{1}{x^3}\big)}_{=1}
\end{aligned}$$

Ossia, se $a > 0$ allora

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty$$

ANALOGAMENTE, se $a < 0$ allora

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty$$

Inoltre, e di conseguenza, essendo una funzione continua, ammette almeno un punto $x_1$ in cui $f(x_1) = P(x_1) = 0$, ossia uno zero del polinomio. È possibile che questo sia l'unico zero del polinomio, ma è anche possibile che abbia altri due punti $x_2$ e $x_3$ in cui $f(x_2) = P(x_2) = f(x_3) = P(x_3) = 0$. Ovviamente è possibile che, se c'è più di uno zero, che alcuni di questi zeri coincidano (anche tutti e tre).

La funzione dell'esercizio può quindi avere al massimo un altro zero, (può anche accadere che il terzo zero coincida con uno degli altri due)

Esaminando le varie risposte e disegnando il grafico si capisce che può avere solo zeri non negativi.
DA COMPLETARE CON FIGURE...(se avrò tempo...)
PER RISOLVERE QUESTO ESERCIZIO E' UTILE USARE IL FATTO CHE
un polinomio di terzo grado con coefficiente di grado massimo positovo ammette al massimo tre intervalli del tipo $(-\infty, m_1)$, $(m_1, m_2)$ e $(m_2, +\infty)$ nei quali
in $(-\infty, m_1)$ il polinomio di terzo grado cresce,
in $(m_1, m_2)$ il polinomio di terzo grado decresce,
in $(m_2, +\infty)$ il polinomio di terzo grado cresce,

UN MODO PIU' SEMPLICE PER DIMOSTRARLO, PERO', usa il fatto che la derivata di un polinomio di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è un polinomio di secondo grado $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e quindi $m_1$ ed $m_2$ sono gli zeri di $f'$ e che $f'(x)$ è positiva per $x$ in $(-\infty, m_1)$ e per $x$ in $(m_2, +\infty)$, mentre $f'(x)$ è negativa per $x$ in $(m_1, m_2)$.
OPPURE IL FATTO CHE se uno zero ammette come tangente l'asse delle $x$, allora è uno zero doppio...
TUTTAVIA, ATTRAVERSO LA PROSSIMA VARIANTE DELL'ESERCIZIO D4, SI PUO' MOSTRARE COME L'USO DELLE DERIVATE, INSIEME AI DATI DEL PROBLEMA, PERMETTE DI OTTENERE ESATTAMENTE I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO e QUINDI OTTENERE CHE IN REALTA' IL TERZO ZERO COINCIDE CON 3.

**DISCUSSIONE DELLA VARIANTE dell'Esercizio D.4 del FOGLIO 5: segue il testo, per comodità del lettore**

Un polinomio di terzo grado, il cui grafico passa per il punto $(1, 1)$ e ammette ivi un estremo. È tale che $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$. Trovare esplicitamente il polinomio.

Questa variante è interessante in quanto usando le derivate si ottiene tenendo conto che, dai dati sappiamo che $f(1) = 1$, ec essendo il punto 1 un punto estremale (ossia un punto di minimo o massimo locale) ed essendo un polinomio derivabile per ogni $x$ reale, necessariamente $f'(1) = 0$. Inoltre, posto

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{e} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

le informazioni che ci fornisce il testo possono essere tradotte in formule come segue:

$$\begin{array}{lclcr}
f(0) = 0 & \Leftrightarrow & a0^3 + \ b0^2 + c0 + d = 0 & \Leftrightarrow & d \ = 0 \\
f(1) = 1 & \Leftrightarrow & a1^3 + \ b1^2 + c1 + d = 1 & \Leftrightarrow & a + \ b + \ c + d \ = 1 \\
f'(1) = 1 & \Leftrightarrow & 3a1^2 + 2b1 \ + c \qquad = 0 & \Leftrightarrow & 3a + 2b + \ c \qquad = 0 \\
f(3) = 0 & \Leftrightarrow & a3^3 + \ b3^2 + c3 + d = 1 & \Leftrightarrow & 27a + 9b + 3c + d \ = 0
\end{array}$$

da cui

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \end{cases}$$

che si risolve osservando che $d = 0$ e che $a, b, c$ risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c = 0 \end{cases}$$

da cui, risolvendolo, e usando la regola di Cramer

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 27 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \end{vmatrix}} \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 27 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \end{vmatrix}}$$

da cui, sviluppando i determinanti nei numeratori, rispetto alle colonne che contengono due zeri

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = -\frac{6}{4}, \qquad c = \frac{9}{4}$$