Equazioni differenziali ordinarie

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad x \in I \text{ intervallo}$$

la funzione $y(x)$ è l'incognita

Esempio $\qquad y''(t) = \dfrac{f(t, y(t), y'(t))}{m}$ moto di un pto. su una retta.

Eq^{ni} alle derivate parziali

quando la f incognita dipende da più variabili

Eq^{ne} del calore in dim. 1 $\qquad u_t = u_{xx}$

$u(x,t)$ = temperatura di un filo nel pto x all'istante t.

in dim 2 $\qquad u_t = u_{xx} + u_{yy} \qquad (u = u(x,y,t))$

$$y'(x) = x\, y(x)$$

Vogliamo trovare l'integrale generale di questa eq^{ne}

cioè l'insieme di tutte le soluzioni dell'eq^{ne}.

Eq^{ne} del 1° ordine, lineare (rispetto alla y e alle sue derivate)

Le eq^{ni} lineari del 1° ordine hanno una formula di risoluzione, ma procediamo senza conoscerla.

$y(x) \equiv 0$ è sol^{ne}.

Se $y(x) \neq 0$ dividiamo per y

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

Integriamo (in senso indefinito) rispetto a x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$\parallel$ • sost. $y(x) = y$

$y'(x)\,dx = dy$

$$\int \frac{dy}{y}$$

$\parallel$

$\ln |y|$

$$\Rightarrow \ln |y(x)| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$|y(x)| = e^{x^2/2 + c} = k e^{x^2/2} \qquad k = e^c > 0$$

$$y(x) = \underbrace{\pm k}_{=k_1 \in \mathbb{R}} e^{x^2/2} \Longrightarrow y(x) = k_1 e^{x^2/2}$$

$k_1 \in \mathbb{R}$

Si generalizza a eq^{ni} del tipo → f, g continue

$$y' = f(x)\,g(y)$$

Eq^{ni} a variabili separabili

1) Si cercano le sol^{ni} costanti, cioè gli zeri della funzione g.

2) $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{g(y)} = f(x) \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'\,dx}{g(y)} = \int f(x)\,dx = F(x)+c$

sost. $y(x)=y$

$$\int \frac{y'\,dx}{g(y)} = \int \frac{dy}{g(y)} = H(y)$$

$H(y) = F(x) + c \Rightarrow$ speriamo di poter invertire H $\Rightarrow$ $y(x) = H^{-1}(F(x)+c)$

$x y' = \operatorname{tg} y \Rightarrow y' = \frac{\operatorname{tg} y}{x}$ è a variabili separabili

(non è lineare)

1) Sol^{ni} costanti $\quad y(x) = k_1\pi \,, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$ $\qquad k = e^c$

2) $$\int \frac{y'\,dx}{\operatorname{tg} y} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \underset{\overset{\shortparallel}{\ln k}}{c} = \ln(k|x|)$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y} \cos y$$

$$\shortparallel$$

$$\ln|\operatorname{sen} y|$$

$$\Rightarrow |\operatorname{sen} y| = k|x| \Rightarrow \operatorname{sen} y = \pm k\,|x| \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} y = kx}$$

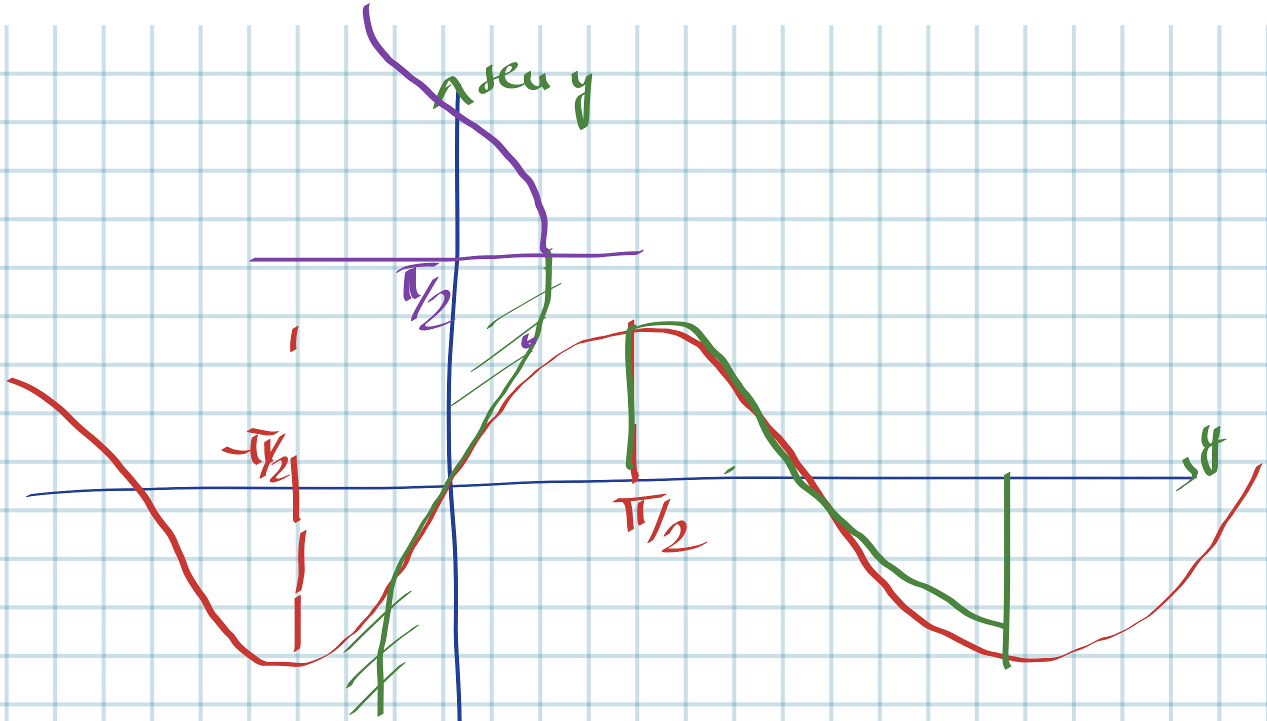
Se l'eq^{ne} $y'(x) = \frac{\operatorname{tg} y}{x}$ fosse accompagnata da una "condizione iniziale" del tipo

$$y(x_0) = y_0 \,,$$ potrei trovare la costante K

Ad esempio, se $y(1) = \frac{\pi}{3} \implies \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = K \cdot 1 \Rightarrow K = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\implies y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)$$

se la C.I. fosse invece $y(1) = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow$ stesso $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Se $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ l'inversa di sen y è arcsen z

Se invece $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, allora l'inversa di $f(y) = \operatorname{sen} y$ è

$$f^{-1}(z) = \pi - \operatorname{arcsen} z \Rightarrow y = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

Caso particolare: Eq^{ni} lineari omogenee

$$y' = a(x)\,y$$

<u>Oss</u> se $y(x)$ è sol^{ne}, anche $c\,y(x)$ lo è

se $y(x), v(x)$ sono sol^{ni}, anche $y(x)+v(x)$ lo è

Cioè l'insieme delle sol^{ni} è un sottospazio vettoriale di $C^1(I)$

E' anche un'eq^{ne} a variabili separabili. $y(x)\equiv 0$ è sol^{ne}.

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int a(x)\,dx = A(x)+c$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

$$\Rightarrow |y| = k e^{A(x)} \qquad k>0$$

$$y(x) = k e^{A(x)} \quad \text{con } k\in\mathbb{R}$$

Eq^{ni} lineari del 1° ordine $\quad y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad (E)$

Consideriamo l'eq^{ne} omogenea associata

$(E_0) \quad y'(x) = a(x)\,y(x)$

OSS. Siano $y(x)$ e $u(x)$ due sol^{ni} di (E). Allora la loro differenza è sol^{ne} di (E_0)

$$\left(y(x) - u(x)\right)' = y'(x) - u'(x) = a(x)\,y(x) + \cancel{b(x)} - a(x)\,u(x) - \cancel{b(x)}$$
$$= a(x)\left(y(x) - u(x)\right)$$

Viceversa, se prendiamo una sol^{ne} particolare di (E) e le sommiamo una sol^{ne} di (E_0), otteniamo ancora una sol^{ne} di (E)

TEOREMA Le sol^{ni} di (E) sono tutte e sole le soluzioni che sono somma di una fissata sol^{ne} $y_p(x)$ di (E) e una generica sol^{ne} di (E_0)

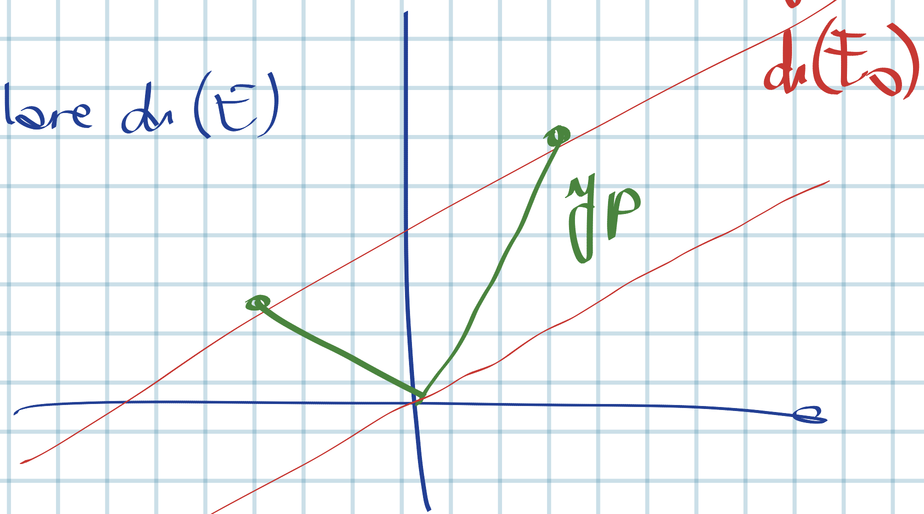
qualunque, può variare.

Integrale generale di (E)

integrale generale di (E_0)

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

sol^{ne} particolare di (E)



$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} + 3x^2\cos x & (E) \\ y(\pi) = 3\pi^3 \end{cases}$$

$\frac{2}{x}$: $a(x)$, $3x^2\cos x$: $b(x)$

Problema di Cauchy

Studiamo l'omogenea associata (E_0) $y' = \frac{2y}{x}$

$\Longrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \longrightarrow \boxed{y = kx^2}$ Integrale gen di (E_0)

In generale l'eq^{ne} (E_0) $y' = a(x)\,y$ $\boxed{z(x) = kx^2}$

ha sol^{ne} $y = ke^{A(x)}$

Nel nostro caso $a(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = \int a(x)dx =$

$= \int \frac{2}{x}dx = \ln(x^2)$

$y = kx^2$

Cerchiamo <u>una</u> sol^{ne} particolare di (E)

Si cerca una sol^{ne} $y_p(x)$ nella forma

$$y_p(x) = k(x)\,x^2$$

metodo di variazione delle costanti.

$$y_p'(x) = k'(x)\,x^2 + 2k(x)\,x$$

$\Longrightarrow$ sost. nell'eq^{ne} (E)

$$k'(x)\,x^2 + \cancel{2k(x)\,x} = \cancel{\frac{2}{x}\,k(x)\,x^2} + 3x^2\cos x$$

$$k'(x) = 3\cos x$$

$$k(x) = +3\,\text{sen}\,x$$

$$y_p(x) = +3\,x^2\,\text{sen}\,x \quad \text{è sol}^{ne} \text{ di } (E)$$

$\Rightarrow$ l'integrale generale di (E) è

$$y(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x + kx^2 = (3\operatorname{sen} x + k)x^2$$

applico la cond^{ne} iniziale $y(\pi) = 3\pi^3$

$$3\pi^3 = k\pi^2 \Longrightarrow k = 3\pi$$

$\Rightarrow$ La sol^{ne} del pb. di Cauchy è

$$y(x) = 3(\operatorname{sen} x + \pi)x^2$$

Il procedimento si può ripetere $\forall$ eq^{ne} lineare del 1° ordine

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \qquad (E)$$

$$y'(x) = a(x)\,y(x) \qquad (E_0)$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

Integrale generale di (E_0) $\quad z(x) = k e^{A(x)}$

Cerco una sol^{ne} particolare nella forma $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$

$$y_p'(x) = k'(x)e^{A(x)} + k(x)\,a(x)\,e^{A(x)}$$

l'eq^{ne} (E) diventa $\quad k'(x)e^{A(x)} + \cancel{k(x)\,a(x)\,e^{A(x)}} = \cancel{a(x)\,k(x)\,e^{A(x)}} + b(x)$

$$\Rightarrow k'(x) = e^{-A(x)}b(x) \Longrightarrow k(x) = \int e^{-A(x)}b(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ si trova $y_p(x)$ $\Longrightarrow$ $y(x) = y_p(x) + k e^{A(x)}$

Formula per l'integrale generale di un'eq^{ne} diff^{le} lineare del 1° ordine

$$(E) \qquad y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(k + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \right)$$

dove $A(x) = \int a(x)\,dx$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} + (x+x^3)\operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$a(x) = \frac{2x}{1+x^2} \implies A(x) = \ln(1+x^2)$$

$$e^{A(x)} = 1+x^2$$

$$y(x) = (1+x^2)\left(k + \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}(x+x^3)\operatorname{sen} x \, dx}\right) =$$

$$= \int x \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

$$= (1+x^2)\left(k - x\cos x + \operatorname{sen} x\right) \implies k=0 \quad \text{dalla c.i.}$$

$$\Rightarrow y(x) = (1+x^2)(\operatorname{sen} x - x\cos x)$$

$$\begin{cases} y' = 2y+1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrale gen. omog. $y(x) = ke^{2x}$

Una sol^{ne} particolare si vede a occhio: $y(x) \equiv -1/2$

$\Rightarrow$ integrale generale $y(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$

$1 = k - \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$ $\qquad y(x) = \frac{1}{2}(3e^{2x} - 1)$