Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (*)$$

OSS Converge sempre per $x=x_0$

TEOREMA

$\exists! R \in [0,+\infty]$ (raggio di convergenza della serie di pot.)

t.c

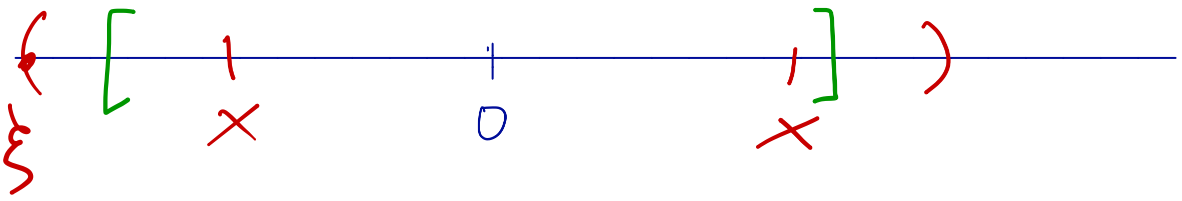
1) La serie converge assolutamente per $|x-x_0|<R$
2) La serie non converge per $|x-x_0|>R$
3) La serie converge totalmente ($\Rightarrow$ uniformemente) in $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ $\forall \alpha < R$.

PROP. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (per sempl. $x_0 = 0$) converga per $x = \xi \neq 0$.

Allora

1) La serie converge $\forall x$ t.c. $|x| < |\xi|$

2) La serie converge totalmente in $[-\alpha, \alpha]$ $\forall\, \alpha < |\xi|$.



DIM. PROP

Sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0 \Longrightarrow$

$|a_n \xi^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per un opportuno M.

Sia ora x t.c. $|x| < |\xi|$

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \left|\frac{x}{\xi}\right|^n \leq M \left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^n$$

La serie $\sum \left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^n$ converge in quanto $\frac{|x|}{|\xi|} < 1$, e quindi

converge anche la serie $\sum |a_n x^n|$, che dim. 1)

Dim 2)

$\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, si ha

$|a_n x^n| \leq \underbrace{|a_n||\alpha|^n}_{M_n}$ la cui serie converge per il pto 1).

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $[-\alpha, \alpha]$. $\square$

Il teorema segue facilmente, ponendo

$$R = \sup X = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

OSS $X \neq \emptyset$ perché $0 \in X$

Se $R \in (0, +\infty)$,

allora:

1) La serie converge $\forall x \in (-R, R)$

Infatti, sia $|x| < R$, per def. di sup $\exists\, \xi \in X$ t.c.

$|x| < \xi \leq R \Rightarrow$ la serie converge in $\xi \overset{\text{PROP}}{\Longrightarrow}$ converge assolut. in x

2) La serie non converge se $|x| > R$.

se $\exists x_1$ t.c. $|x_1| > R$ e la serie converge, allora per la prop. la serie convergerebbe in $(-|x_1|, |x_1|)$, quindi il sup di X sarebbe $> R$. $=$

La conv. totale in $[-\alpha, \alpha]$ $\forall \alpha < R$ segue dalla Prop.

Casi $R = 0$, $R = \infty \Rightarrow$ per esercizio

Esercizio. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)\ 2^n}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^n} \implies \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+1)\,\cancel{2^n}}{(n+2)\,2^{\cancel{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

$\implies R = 2$

$\implies$ la Σ converge ass. per $|x-3|<2$, cioè $\forall x \in (1,5)$

$\Downarrow$ puntualm.

la Σ non converge per $|x-3|>2$, cioè per $x \in (-\infty, 1) \cup (5,+\infty)$

Per $x=1$, la Σ vale $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n+1}$ diverge

Per $x=5$, la Σ vale $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge per Leibniz.

In def. la Σ converge sse $x \in (1,5]$

assolutamente in $(1,5)$

unif.te

Converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[3-\alpha, 3+\alpha]$ con $0<\alpha<2$

Per Abel, conv. uniforme in $[1+\varepsilon, 5]$.

Non si ha convergenza unif. in $(1,5]$, né in intervalli della forma $(1, 1+\varepsilon)$

TEOREMA Se una serie/successione di funzioni continue in $[a,b]$ converge uniformemente in (a,b), allora converge unif^{te} in $[a,b]$

Dim. per esercizio

Altro risultato importante

1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ (2) hanno lo stesso raggio di convergenza. Sia R il raggio di conv. di (1), sia R_2 il raggio di (2).

Dimostra che a) $R_2 \leq R$ b) $R \leq R_2$.

Sia $|x| < R \Rightarrow$ sappiamo che la serie (1) converge in $y = \frac{|x|+R}{2}$.

$$|n a_n x^{n-1}| = |a_n| |x|^n \frac{n}{|x|} = \underbrace{|a_n| \, |y|^n}_{\leq M} \frac{n}{|x|} \frac{|x|^n}{|y|^n} \leq$$

$$\leq \frac{M}{x} n \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^n = \frac{M}{x} \, n q^n$$

$\frac{|x|}{|y|} = q < 1$

la serie associata converge per il criterio del rapp.

$$\frac{(n+1)\,q^{n+1}}{n\,q^{n}} \to q < 1$$

Abbiamo provato che (2) converge $\forall x$ t.c. $|x| < R$.

$\Rightarrow R_2 \geq R$.

La parte b) è quasi uguale.

Sia $|x| < R_2$, e sia $y = \frac{|x| + R_2}{2}$ $\Rightarrow$ la serie $\sum |a_n| n |y|^{n-1}$ converge $\Rightarrow |a_n| n |y|^{n-1} \leq M$.

$$|a_n x^n| = \frac{\overbrace{n\,|a_n|\,|y|^{n-1}}^{\leq M}}{n} \frac{|x|^n}{|y|^{n-1}} \leq \frac{M\,|y|}{n} \Big(\underbrace{\frac{|x|}{|y|}}_{q<1}\Big)^n = M\,|y|\,\frac{q^n}{n}$$

questa serie converge

$\Rightarrow$ la $\sum (1)$ converge $\forall x \in (-R_2, R_2) \Rightarrow R \geq R_2$

Applicazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$\Downarrow$ integrando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) \qquad \forall x \in (-1,1)$$

derivando, invece

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Sostituendo $-x^2$ al posto di x nella prima, ottengo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \text{ t.c. } \cancel{-x^2 \in (-1,1)}$$

$$x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\operatorname{arctg} x = +x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad \forall x \in (-1,1)$$

TEOREMA

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con $R>0$.

Allora sia $s(x)$ la sua somma, cioè $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; \forall x \in (-R,R)$

Allora $s(x) \in C^{\infty}(-R,R)$, e $a_n = \dfrac{s^{(n)}(0)}{n!}$.

In altre parole, ogni serie di potenze con raggio $R>0$ è la serie di Taylor della sua somma

Sappiamo che $s(x)$ è derivabile, e

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

$$s'(0) = a_1$$

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

$$s''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{s''(0)}{2}$$

$$s'''(0) = 3!\, a_3 \implies a_3 = \frac{s'''(0)}{3!}$$

$$a_k = \frac{s^{(k)}(0)}{k!}$$

La serie di partenza diventa: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} x^n$

ESERCIZIO

Usando solo la calcolatrice, calcolare $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^7}$ con un errore inferiore a 10^{-10}.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Integro per serie

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+1} \, \frac{1}{2^{7n+1}}$$

E' una "Serie di Leibniz"

$$\sum_n (-1)^n b_n$$

$$b_n \searrow 0$$

Per una serie di Leibniz, si ha $|S_n - S| < b_{n+1}$

somma ridotta n-esima

Se richiediamo $|S_n - S| < 10^{-10}$,
è sufficiente cercare n t.c.

$$b_{n+1} = \frac{1}{7n+8} \cdot \frac{1}{2^{7n+8}} < 10^{-10}$$

$$n=0 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{8} \frac{1}{2^8}$$

$$n=1 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2^{15}}$$

$$n=3 \Rightarrow b_4 = \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{2^{29}} < 10^{-10}$$

$$\Rightarrow |S_3 - S| < 10^{-10}$$

$\Rightarrow$

$$S_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{1}{2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374242$$

Questo è il valore approssimato cercato.

$\square$

Abbiamo visto che:

Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di conv. $R>0$, allora la somma $s(x)$ della serie è $C^\infty(-R,R)$, e la serie di potenze è la serie di Taylor di $s(x)$ con pto iniziale $x_0=0$ (si può rifare tutto per $x_0 \neq 0$), cioè

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$$

Questione leggermente diversa:

Sia $f(x)$ una funzione C^∞ in (x_0-a, x_0+a), allora posso considerare la sua serie di Taylor (che è una serie di potenze)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (*)$$

Domande naturali:

1) Il raggio di convergenza della serie $(*)$ è >0?
2) In tal caso, quanto vale $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
   Per caso si ha $S(x) = f(x)$?

risp. 1) Non sempre. Controesempio (complicato)

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(x t^2)\, dt, \quad x_0 = 0 \quad //$$

$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma la sua serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha raggio di convergenza zero.

Può anche accadere che f sia C^∞ su un intervallo (x_0-a, x_0+a) ma la sua serie di Taylor abbia raggio di convergenza $R<a$

Risp. 2 Non sempre

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

f è continua in $x_0=0$ $\qquad f(0)=0$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} \cdot 2t^3 = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0$$

$t = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'_+(0)=0$. Analogamente, $f'_-(0)=0 \implies f'(0)=0$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x \neq 0$$

$$f''(x) = e^{-1/x^2}\left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$$

La sua serie di Taylor è la serie con coeff^ti^ tutti nulli.

Ovviamente la sua somma vale $s(x) \equiv 0 \neq f(x)$

Tuttavia ci sono molti casi in cui effettivamente la risposta alle domande 1) e 2) è positiva, cioè

1) Il raggio della Σ di Taylor è positivo.

2) $s(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

<u>OSS</u> Formula di Taylor con il resto di Lagrange

$f \in C^{\infty}(x_0 - a, x_0 + a) \Longrightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)}$$

ξ compreso tra x e x_0

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$= S_n(x) + R_n(x)$$

Quindi per dimostrare

che $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, basta provare che $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Esempio importantissimo

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$x \in [-A, A]$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|R_n(x)| \leq e^A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{(criterio del rapporto)}$$

$\Rightarrow$ In $[-A, A]$ $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ma A è arbitrario $\Rightarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(4)}(0) = 0 \qquad \cdots$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

$$|R_{2n+2}(x)| = \frac{|f^{(2n+3)}(\xi)|\,|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{|\cos \xi|\,|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proprietà interessanti di $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$

$\operatorname{sh} x$ è dispari

$\operatorname{ch} x$ è pari

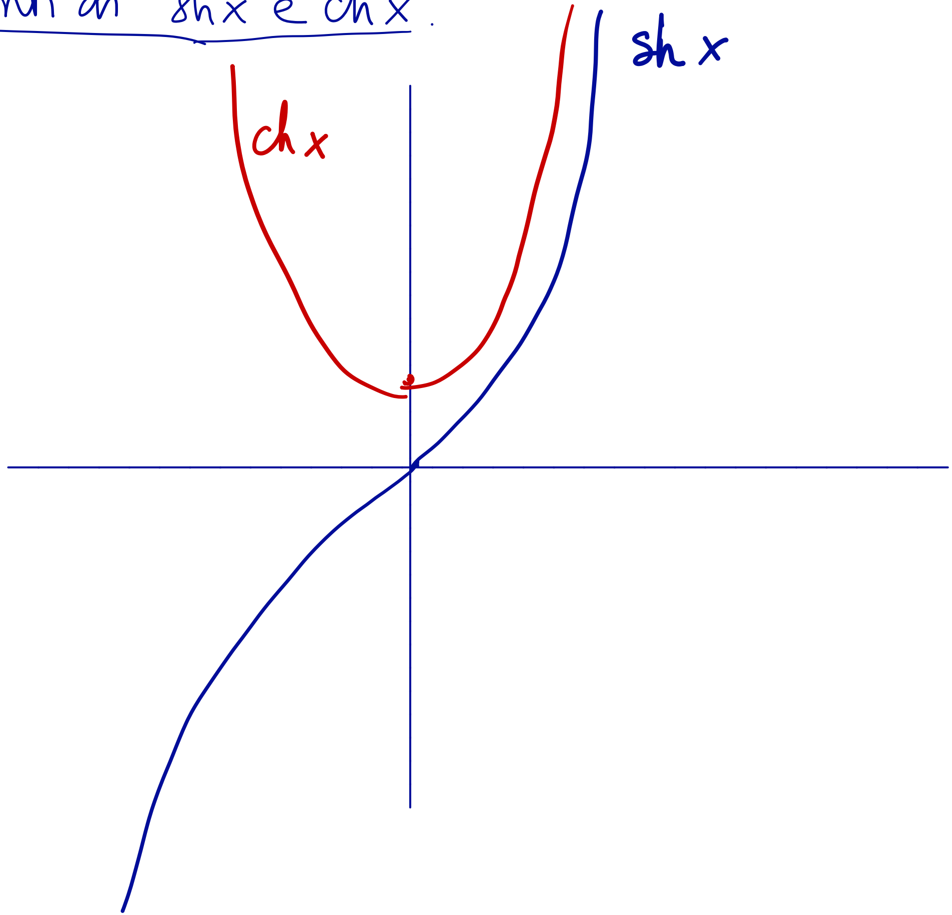
$\operatorname{sh}(0) = 0$

$\operatorname{ch}(0) = 1$

$D \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$

$D \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$



$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(1 - (-1)^k\right)$$

I termini pari si annullano

0 se k pari

2 se k dispari

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \forall x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad \forall x\in(-1,1)$$

x^2 al posto di x

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Integro per serie:

$$\forall x\in(-1,1)$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\dots$$

Binomio di Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\Rightarrow (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$ $\quad f(0)=1$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\quad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}}_{\binom{\alpha}{k}} x^k + R_n(x)$$

$\binom{\alpha}{k}$: coeff^{te} binomiale generalizzato

Si dimostra che, $\forall x \in (-1,1)$ $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$$\Longrightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$$

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$. $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$

Quindi la formula del binomio di Newton in realtà è una serie con coeff.^{ti} def.^{te} nulli.

$\alpha = -1/2$ $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$$

$x \to -x^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Integrando per serie

Si definisce $\binom{\alpha}{0} = 1$

$$\arcsen x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots$$

$$\binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1} = -1/2$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \frac{3}{8}$$

Esercizio Data la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)}{k^2+1} (\log x)^k$$

$x > 0$

studiare C.P, C.U., C.T., C.A.

Poniamo $\log x = y \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)}{k^2+1} y^k$ serie di potenze.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{(k+1)^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{k+2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$\Rightarrow$ C.P.

La Σ converge assolutam. per $y \in (-1,1)$

La Σ non converge per $y \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$y=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)}{k^2+1}$ converge (non assolut.)

Converge se $b_k = \dfrac{k+2}{k^2+1} \searrow 0$, denoto $\eta(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$

$$\eta'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ per } x \text{ suff}^{te} \text{ grande.}$$

La serie C.T. in $[-\alpha,\alpha]$ $\forall \alpha \in (0,1)$

Per $y=-1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}$ non converge $\left(\sim \frac{1}{k}\right)$

La serie di partenza C.P. se $\ln x \in [-1, 1]$

cioè se $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

C.A per $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$

C.T. in $\left[\frac{1}{e}+\varepsilon, e-\varepsilon\right]$

C.U. in $\left[\frac{1}{e}, e\right]$? NO

C.U. in $[1, e]$? sì (Abel) anche $\left[\frac{1}{e}+\varepsilon, e\right]$

C.U. in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$? NO