Foglio 7 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

13 novembre 2015

7.1 Esercizio

Trovare l'insieme E di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{4^k}$$

e dire in quali sottoinsiemi di E la serie converge totalmente.

7.2 Esercizio

Studiare la convergenza semplice, assoluta e totale della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log x)^{3k}}{\sqrt{k}+1}, \qquad x > 0\,.$$

7.3 Esercizio

Trovare l'insieme E di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{-k}(k+2)}{k^2+1} \log^k(x).$$

e dire in quali sottoinsiemi di E si ha la convergenza totale.

7.4 Esercizio

Dopo aver studiato la convergenza della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-kx},$$

si calcoli

$$\int_1^2 f(x)\, dx.$$

7.5 Esercizio

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k x^{2k}}{k^2}$$

i. determinare l'insieme di convergenza E;
ii. determinare il sottoinsieme di E in cui la serie converge totalmente;
iii. determinare il sottoinsieme di E in cui la serie risulta derivabile.

7.6 Esercizio

Data la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{3^k}.$$

studiare la convergenza semplice, assoluta e totale. Detta $f(x)$ la somma, senza calcolarla, determinare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

7.7 Esercizio

Data la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

si calcoli il raggio di convergenza quando

$$a_k = 2^k + \frac{1}{2^k}, \quad a_k = k^\alpha \pi^k, \quad a_k = (-1)^k \ln\left(1+5^{-k}\right)$$

poi si discuta la convergenza delle serie al bordo dell'insieme di convergenza puntuale e si scriva esplicitamente la somma della serie.

7.8 Esercizio

Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

si calcoli dove e a cosa la serie converge quando

$$f_k(x) = e^{-kx^2}, \quad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!}(x)^{-2k},$$

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}.$$

7.9 Esercizio

Date le funzioni

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

si calcoli le loro serie di Taylor spiegando perché tale serie convergono in tutto $\mathbb{R}$.

7.10 Esercizio

Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+2}(x^2-4)^{2k},$$

studiarne la convergenza puntuale, uniforme, assoluta, totale. Calcolarne la somma.

7.11 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x+4)^{2k}}{(2k)!(2k+2)}$$

e calcolarne la somma.

7.12 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+1}(\log x)^k$$

e calcolarne la somma.

7.13 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \frac{(2-\log x)^{2k}}{k}$$

e calcolarne la somma.

7.14 Esercizio

Calcolare, motivando i passaggi, la somma della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (-1)^n x^{2n} \arctan^4 x \, dx.$$

(Suggerimento: usare il teorema di integrazione per serie)

7.15 Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(9-x^2)}},$$

e individuare almeno un intervallo di convergenza totale.