AVVISI

1) Prenotarsi entro il 18 novembre sulla web page per la prova di esonero del 20 novembre

2) Oggi esercitazione facoltativa in Aula Amaldi alle ore 14:30 (Prof. Montefusco)

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (*)$$

OSS Converge sempre per $x=x_0$

TEOREMA

$\exists ! \, R \in [0,+\infty]$ (raggio ~~di convergenza~~ della serie di pot.)

t.c

1) La serie converge assolutamente per $|x-x_0|<R$
2) La serie non converge per $|x-x_0|>R$
3) La serie converge totalmente ($\Rightarrow$ uniformemente) in $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ $\forall \alpha < R$.

CRITERIO DEL RAPPORTO PER SERIE NUMERICHE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a segno qualsiasi ($a_n \neq 0$ def^{te})

Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$.

Allora:

1) se $\ell \in [0,1)$, la serie converge assolutamente;
2) se $\ell \in (1,+\infty]$, la serie non converge. ($|a_n| \to +\infty$)

Se invece $\ell = 1$, non si può dire nulla.

CRITERIO DELLA RADICE PER SERIE NUMERICHE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a segni qualsiasi.

Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty]$.

Allora:

1) se $\ell \in [0,1)$, la serie converge assolutamente;
2) se $\ell \in (1,+\infty]$, la serie non converge. $(|a_n| \to +\infty)$

Se invece $\ell = 1$, non si può dire nulla.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+1)(n+2)} = b_n$$

Applico il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{|x-5|^{n+1}}}{\cancel{(n+2)}(n+3)} \frac{(n+1)\cancel{(n+2)}}{\cancel{|x-5|^n}} = |x-5|$$

Se $|x-5|<1$ la serie converge assolutamente

se $|x-5|>1$ la Σ non converge.

$\Rightarrow R=1$, La serie converge (assolutamente) per $x\in(4,6)$

La serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(4,6)$, cioè in ogni intervallo della forma $[5-\alpha, 5+\alpha]$ con $\alpha<1$

se $x=6$ la Σ diventa

$$\sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{converge!}$$

se $x=4$ la Σ diventa

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{converge!}$$

Riassumendo, la Σ converge sse $x \in [4,6]$

Resta da capire se c'è convergenza uniforme in $(4,6)$ opp $[4,6]$

Il teorema di Abel (da fare) ci dice che c'è conv. uniforme in $[4,6]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}(x-1)^{2n}$$

Poniamo $(x-1)^2=y$

La Σ diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}y^n}_{b_n}$ è una Σ di potenze

Conviene usare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n|y| = e^3|y|$$

Se $|y|<e^{-3}$, converge assolutamente

Se $|y|>e^{-3}$, non converge

Se $y=e^{-3}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^{3n}}$ non conv (termine non infinitesimo)

$t\to 0$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^{3n}}=e^{n^2\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-3n}\to e^{-9/2}$$

$$n^2\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-3n=n^2\left(\cancel{\frac{3}{n}}-\frac{9}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\cancel{3n}=-\frac{9}{2}+o(1)\longrightarrow-\frac{9}{2}$$

Per $y = -e^{-3}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2} \frac{(-1)^n}{e^{3n}}$

anche qui il termine non è infinitesimo $\Rightarrow$

la $\sum$ non converge.

Riassumendo, la serie converge (ass.) sse $|y| < \frac{1}{e^3}$

Non conv. se $|y| \geq \frac{1}{e^3}$

La serie converge totalmente in $[-\alpha, \alpha]$ $\forall \alpha \in \left(0, \frac{1}{e^3}\right)$

¿La serie converge unif^{te} in $\left(-\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^3}\right)$?

NB. Teorema da fare: se una serie di potenze con raggio R non converge per $x = x_0 + R$, non converge unif^{te} in (x_0, x_0+R)

Ripassiamo alla Σ di partenza

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}(x-1)^{2n} \qquad (x-1)^2=y$$

converge (assolutamente) per

$$|(x-1)^2|<\frac{1}{e^3}, \quad \text{cioè} \quad |x-1|<\frac{1}{e^{3/2}}$$

non converge per $|x-1|\geq \frac{1}{e^{3/2}}$

converge unif^{te} in $[1-\alpha, 1+\alpha]$, $\forall \alpha \in (0, e^{-3/2})$

non conv. unif. in $(1-e^{-3/2}, 1+e^{-3/2})$

Ci sono anche serie con raggio di convergenza $R=+\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad b_n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}}\,\frac{\cancel{n!}}{|x|^n} =$$

$$= \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \qquad \forall x$$

Converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (assolutamente)

converge totalmente in $[-\alpha,\alpha]$ $\forall \alpha>0$

converge unif^{te} in $\mathbb{R}$? No, per la C.N uniforme $f_n(x) \rightrightarrows 0$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty \not\longrightarrow 0$$

Ci sono serie con $R=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$ Converge solo se $x=0$

TEOREMA Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze.

Supponiamo che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$$

Allora il raggio di convergenza della $\sum$ vale

$$R = \frac{1}{\ell}$$ (con l'intesa che $R=0$ se $\ell=+\infty$
$R=+\infty$ se $\ell=0$)

<u>Dim.</u> Poniamo $b_n = a_n x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_n \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = |x| \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\,\ell$$

se $|x|\ell < 1$, cioè $|x| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow$ la Σ conv. ass.

se $|x|\ell > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow$ la Σ non converge

$R = \frac{1}{\ell}$

TEOREMA Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze.
Supponiamo che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty]$$

Allora il raggio di convergenza della $\sum$ vale

$$R = \frac{1}{\ell}$$ (con l'intesa che $R=0$ se $\ell=+\infty$
$R=+\infty$ se $\ell=0$)

TEOREMA (Integrazione e derivazione di Σ di potenze)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una Σ di potenze di raggio $R>0$.

Definiamo $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $x \in (-R, R)$

Sappiamo già che $s(x)$ è continua in $(-R,R)$.

Consideriamo la serie "derivata" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

e la serie "integrata" $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

1) Allora queste due serie hanno raggio di convergenza R.

2) La funzione $s(x)$ è derivabile in $(-R,R)$, e si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = s'(x) \quad \forall x \in (-R,R)$$

3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x s(t)\,dt \quad \forall x \in (-R,R)$$

Applicazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{in } (-1,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{in } (-1,1)$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\Downarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}(x+2)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n} \frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{n+2}{n+1} = 1$$

$R = 1 \Rightarrow$ La serie converge per $|x+2| < 1$ $\quad -3 < x < -1$

non converge per $|x+2| > 1$

non converge per $x = -1$ e $x = -3$

Conv. unif^{me} (totale) in $[-2-\alpha, -2+\alpha]$ $\forall\, \alpha < 1$

non si ha conv. unif in $(-3, -1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} \qquad y \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y}{1-y}$$

Integro

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{n+2} = \int_0^y \frac{t-1+1}{1-t}\,dt = \int_0^y \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$= -y - \ln(1-y)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+2} = -1 - \frac{\ln(1-y)}{y}$$

Derivo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\, y^n = -\frac{-\frac{y}{1-y} - \ln(1-y)}{y^2} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} (x+2)^n = \frac{(x+2) - \ln(-1-x)(1+x)}{(x+2)^2(1-x-2)} \qquad \forall x \in (-3,-1)$$

TEOREMA DI ABEL

Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R \in (0,+\infty)$,

e se converge per $x = x_0+R$, allora converge unif^{te} in $[x_0, x_0+R]$, anzi in $[x_0-\alpha, x_0+R]$ $\forall \alpha < R$.

Vale un risultato analogo in x_0-R