Abbiamo visto che:

$C([a,b])$ è uno spazio metrico con la distanza

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_\infty$$

Richiami di Analisi in 1 variabile

Def. Una succ^{ne} di Cauchy in $\mathbb{R}$ è una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n, m > n_\varepsilon \text{ si ha } |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

In altre parole, gli elementi della successione sono tra loro "vicini" quando n e m sono grandi.

TEOREMA

Una successione $\{x_n\}$ a valori reali è di Cauchy se e solo se è convergente.

OSS Il teorema permette di individuare succ^{ni} convergenti senza conoscere il limite.

Sia ora (X, d) un generico spazio metrico

DEF diremo che la succ^{ne} $\{x_n\}$ di elementi di X converge ad un elemento $\bar{x} \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n > n_\varepsilon \quad d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

cioè se $d(x_n, \bar{x}) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Esempio: se considero $X = C([a,b])$, una succ^{ne} convergente in X munito della distanza del sup significa

$f_n \to f$ in $X = C([a,b])$ <u>sse</u>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon \ d(f_n, f) < \varepsilon$

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Cioè sse $f_n \to f$ unif^{te}.

<u>DEF</u> Una succ^{ne} di Cauchy nello spazio metrico (X, d) (generico) è una succ^{ne} $\{x_n\}$ t.c.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n, m > n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

<u>OSS</u> In un generico spazio metrico (X,d) si ha sempre l'implicazione

$$\{x_n\} \text{ convergente} \Rightarrow \{x_n\} \text{ di Cauchy}$$

<u>dim</u>. Sia $\{x_n\}$ convergente a $\bar{x}$

Fix $\varepsilon>0$. Cerco n_ε t.c. $\forall n,m > n_\varepsilon$ si ha $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,\bar{x}) + d(\bar{x},x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dis triangolare

se n,m maggiori di questo n_ε

Per definizione di limite, sappiamo che $\exists\, n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon$
$d(x_n,\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\square$

Vale il viceversa? cioè, una succ^{ne} di Cauchy è sempre convergente? No, dipende dallo spazio in considerazione

<u>Esempio:</u> $\mathbb{Q}$ dotato della dist. euclidea $d(x,y) = |x-y|$ è uno spazio metrico.

Considero la succ^{ne} $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: è di Cauchy ma non converge, perché il suo limite non è razionale.

<u>DEF.</u> Uno spazio metrico si dice completo se ogni succ^{ne} di Cauchy è convergente.

$\mathbb{R}$, con la metrica euclidea, è completo.

$\mathbb{Q}$ " " " " , non è completo.

In uno spazio metrico non completo possono succedere fenomeni "fastidiosi".

Per esempio, se consideriamo la funzione

$$f(x) = (x^2-2)^2 \quad \text{in } [0,2] \cap \mathbb{Q}$$

$f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ è continua in $[0,2]$, ma non ammette minimo.

TEOREMA $C([a,b])$ con la distanza $d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ è uno spazio completo.

DIM. Sia $\{f_n\}$ una succ^{ne} di Cauchy. Devo provare che $\{f_n\}$ converge ad una certa $f\in C([a,b])$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n,m>n_\varepsilon$ si ha $d(f_n,f_m)<\varepsilon$

$$d(f_n,f_m)=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|$$

Sia ora x un generico punto di $[a,b]$

per $n,m>n_\varepsilon$ $\quad |f_n(x)-f_m(x)|\le d(f_n,f_m)<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall x\in[a,b]$ $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy $\Longrightarrow f_n(x)\longrightarrow f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow f_n \to f$ puntualmente. Ora dobbiamo provare che $f_n \to f$ nella metrica di $C([a,b])$, cioè unif.^{te}

Sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n, m > n_\varepsilon \text{ si ha } d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

$$d(f_n, f_m) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)|$$

~~Cioè~~ $\Longrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n, m > n_\varepsilon, \forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Passando al limite per $m \to \infty$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Cioè:

non cambia nulla se qui c'è "<" oppure "≤"

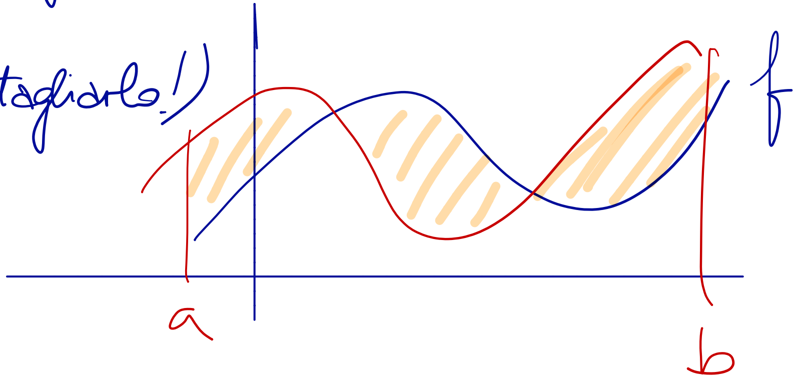
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n > n_\varepsilon \quad d(f_n, f) \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow f_n \to f$ nella metrica considerata.

Esempio Consideriamo $C([a,b])$ con la metrica

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

è una distanza (dettagliarlo!)



Ma lo spazio non è completo.

Vedremo la prossima volta alcuni esempi di successioni di Cauchy che non convergono.

Convergenza di serie di funzioni

Consideriamo una succ^{ne} $f_n : I \to \mathbb{R}$

Consideriamo la serie

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Def. Diremo che la serie $(*)$ converge puntualmente in I se $\forall x \in I$ la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

converge in $\mathbb{R}$ ad una somma che chiamiamo $S(x)$

In altre parole se, $\forall x \in I$, detto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

la somma parziale n-esima nel punto x, si ha $S_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} S(x)$ puntualmente.

Def. diremo se la serie (*) converge unif^{te} in I se $S_n(x)$ converge unif^{te} a $S(x)$ in I

Def. La serie (*) converge assolutamente in I se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{converge puntualmente}$$

Ovviamente

$$\boxed{C.U.} \Rightarrow C.P.$$

$$\boxed{C.A.} \Rightarrow C.P.$$

$$\boxed{C.U.} \not\Rightarrow \boxed{C.A.}, \qquad \boxed{C.A.} \not\Rightarrow \boxed{C.U.}$$

Esempio: serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

1) C.P. in $(-1,1)$

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$\forall x \neq 1$

Fuori dell'intervallo $(-1,1)$ la serie non converge.

2) C.A. $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ converge sse $x \in (-1,1)$

C.A in $(-1,1)$

3) C.U in $(-1,1)$?

3) C.U in $(-1,1)$?

$S_n \to S$ unif^{te} in $(-1,1)$?

$\sup\limits_{x\in(-1,1)} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$?

$\parallel$

$\sup\limits_{(-1,1)} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup\limits_{(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \overset{\forall n}{=} +\infty \not\to 0$

non si ha C.U. in $(-1,1)$

C.U. in $(-1,a]$ con $a<1$.

$\sup\limits_{(-1,a]} |S_n(x) - S(x)| = \sup\limits_{(-1,a]} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \geq \lim\limits_{x\to -1} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{2}$

NON si ha C.U in $(-1,a]$

C.U. in $[-a,a]$ con $0<a<1$

$$\sup_{[-a,a]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{[-a,a]} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Si ha C.U. in $[-a,a]$ $\forall a \in (0,1)$

In generale, studiare la C.U. direttamente non è facile.

Alcuni criteri.

<u>C.N. per la C.U di serie</u>

C.N. per la conv. di una serie numerica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Si ha un analogo criterio per la C.U.

<u>TEOREMA</u>

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge unif^{te} in I, allora la succ^{ne} f_n converge unif^{te} a zero in I.

<u>DIM.</u> Sia $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

$$f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \sup_{x\in I} |s_n(x) - s_{n-1}(x)| =$$

$$= \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \leq$$ dis. triangolare

$$\leq \sup_I \left(|S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \right) \leq$$

$$\leq \sup_I |S_n(x) - S(x)| + \sup_I |S(x) - S_{n-1}(x)|$$

$$= \underset{\downarrow \atop 0}{d(S_n, S)} + \underset{\downarrow \atop 0}{d(S_{n-1}, S)} \longrightarrow 0$$

per la C.U.

$\square$

Mostriamo di nuovo che

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ non conv. unif^{te} in $(-1,1)$

Se convergesse unif^{te}, allora, per la C.N, dovremmo avere

$x^n \longrightarrow 0$ unif^{te} in $(-1,1)$

ma questo è falso, perché

$$\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1 \quad \forall n$$

$\not\to 0$

DEF $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge TOTALMENTE in I se

$\exists \{M_n\}$ successione numerica t.c.

1) $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in I$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

In altre parole, la serie converge totalmente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x)|}_{= M_n} < \infty$$

TEOREMA (C.S.)

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente, allora converge unif^{te}.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{C.U.} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
\text{C.P.} & & \text{C.T.} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{C.A.} \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

OSS C.A. $\not\Rightarrow$ C.U.

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ C.A. in $(-1,1)$ ma non converge unif^{te}.

OSS C.U. $\not\Rightarrow$ C.A. da vedere!