Foglio 6 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

6 novembre 2015

6.1 Esercizio

Si mostri che l'applicazione

$$d_q(f,g) = \int_0^1 \left| f(x) - g(x) \right|^2 dx$$

definisce una distanza sullo spazio $C^0[0,1]$.
Lo spazio $\left(C^0[0,1], d_q\right)$ è completo?

6.2 Esercizio

Si consideri la seguente successione di funzioni

$$h_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, -1/n] \\ nx & x \in (-1/n, 1/n) \\ +1 & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale, uniforme e nella distanza d_q della successione $\{h_n\}$.

6.3 Esercizio

Sia $\{u_n\}$ la successione delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + nu(x) = 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme della successione nei sottoinsiemi di $[0, +\infty)$.

6.4 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1 + \mathrm{e}^{nx}).$$

Dire se successione converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

6.5 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^4 x^4}.$$

Dire se successione converge uniformemente in $[0, \infty)$, in $[0,1]$ e poi in $[1, \infty)$.

6.6 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}.$$

6.7 Esercizio

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = (n+1)\, e^{-|x-n|},$$

studiarne la convergenza puntuale, e dire su quali intervalli si ha convergenza uniforme.

6.8 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{4x + n}{x + n^\alpha}, \qquad x \geq 0.$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori del parametro α la convergenza è uniforme $[0,1]$ e poi in $[1, \infty)$.

6.9 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n + n}$$

Dire se la convergenza è uniforme $[0,1]$ e poi in $[0,\infty)$.

6.10 Esercizio

Sia

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0,1]$ della successione $\{f_n(x)\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

6.11 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della successione

$$f_n(x) = \sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha},\ x > 0$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori del parametro α la convergenza è uniforme $(0,1]$ e poi in $[1,\infty)$.

6.12 Esercizio

Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^\alpha \phi_k(x), \quad \text{con} \quad \phi_k(x) = \begin{cases} 0 & |x| < k \\ 1 & |x| \geq k \end{cases}$$

determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$, poi per quali valori del parametro α la convergenza in tutto $\mathbb{R}$ è uniforme.

6.13 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{|x|}{4^k}\right).$$

Dimostrare che la serie converge uniformemente in ogni insieme limitato dell'asse reale.

6.14 Esercizio

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{con} \quad f_k(x) = x^k \log(1+\frac{x}{k}), \quad x > -1.$$

Si determini per quali $x > -1$ la serie converge puntualmente. Dire se la convergenza è totale in $[0,1)$ e, in caso negativo, determinare un sottoinsieme di $[0,1)$ nel quale la serie converge totalmente.

6.15 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di α la serie converge totalmente in $[-1,1]$. La convergenza è totale in $\mathbb{R}$?