Oggi esercitazione in Aula 3 (Dip. Matematica)
dalle 16:00 alle 18:00

f, g funzioni limitate in I intervallo

$$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad \text{distanza}$$

$$\| f - g \|_\infty$$

Una distanza su un insieme X è una funzione

$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ t.c.

$d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) = d(y,x)$ $\quad \forall x, y \in X$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\quad \forall x, y, z \in X$

modello: $\mathbb{R}$, con la dist: $d(x,y) = |x-y|$

Altro esempio: $\mathbb{R}^N$ con la distanza

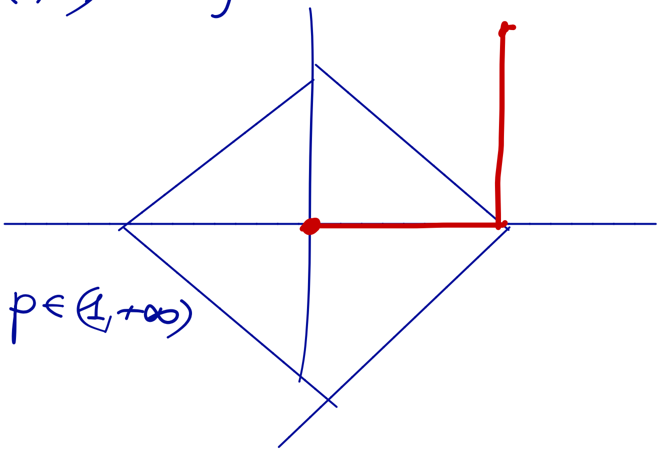
$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| = \left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

Su $\mathbb{R}^N$ possiamo anche definirne altre

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N}|x_i-y_i|$$ verificare che è una distanza

$$B_1^{d_1}((0,0)) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0))<1\}$$

$$|x|+|y|<1$$



$$d_p(\underline{x},\underline{y}) = \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i-y_i|^p\right]^{1/p}$$

$p\in(1,+\infty)$

Sia $C_b(I)$ l'insieme delle funzioni continue e limitate da I in $\mathbb{R}$

$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ è una distanza su $C_b(I)$

$d(f,g) \geq 0$

$d(f,f) = 0$

$d(f,g) = 0 \Longrightarrow \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = 0 \Longrightarrow f(x) = g(x) \ \forall x$

$f = g$

$d(f,g) = d(g,f)$ ovvio

Dis triangolare ?

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$$

$$|f(x)-g(x)| \le \underset{\substack{\rotatebox{-90}{$\le$} \\ \sup\limits_I |f(t)-h(t)| \\ \rotatebox{90}{$=$} \\ d(f,h)}}{|f(x)-h(x)|} + \underset{\substack{\rotatebox{-90}{$\le$} \\ d(h,g)}}{|h(x)-g(x)|} \qquad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \quad |f(x)-g(x)| \le d(f,h) + d(h,g)$$

Passando al sup su x, si ottiene

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g).$$

$C_b(I)$, con questa distanza, è uno <u>spazio metrico</u> cioè un insieme munito di una distanza.

Ci sono altre distanze possibili su I (per sempl. I limitato)

$$d_1(f,g) = \int_I |f(x) - g(x)|\, dx$$ "distanza L^1"

$$d_2(f,g) = \left[\int_I |f(x) - g(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$ "distanza L^2"

Torniamo a $d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$

Diremo che $f_n, f \in L(I)$ = insieme delle funzioni limitate su I

Diremo che f_n converge a f uniformemente in I, per $n \to \infty$, se

$$\lim_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0 .$$

cioè: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon \quad d(f_n, f) \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon, \ \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

" " " $\forall n > n_\varepsilon \ \forall x \in I, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

CONV. UNIFORME

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \forall n > n_\varepsilon \; \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

CONV. PUNTUALE

$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in I \; \exists n_{\varepsilon, x} \text{ t.c. } \forall n > n_{\varepsilon x} \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f_n(x) = x^{1/n} \qquad x \in (0,1)$

Converge puntualmente a $f(x) \equiv 1$

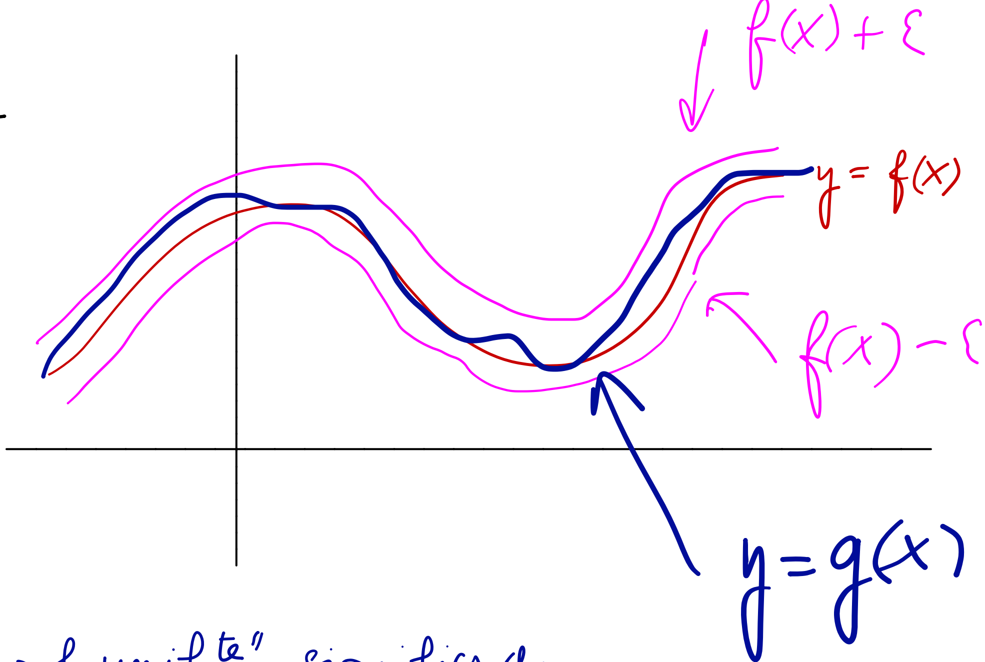
ma non uniformemente

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in(0,1)} \left(1 - x^{1/n}\right) = 1 \not\to 0$$

Converge uniform.^{te} in $(\alpha, 1)$ con $\alpha > 0$

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in(\alpha,1)} \left(1 - x^{1/n}\right) = 1 - \alpha^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$d(f,g) < \varepsilon$



Quindi, "$f_n \to f$ unif.^{te}" significa che, fissato una fascia di semiampiezza ε intorno al grafico di f, se n è abbastanza grande tutto il grafico di f_n giacerà nella fascia considerata

TEOREMA f_n continue in I, $f_n \to f$ uniformemente in I

Allora f è continua.

Dim.

Tesi: $\forall x \in I$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall y \in I$ verificante $|y - x| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq d(f_n, f)} + |f_n(x) - f_n(y)| + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{\leq d(f_n, f)}$$

Fisso n in modo che il 1° e il 3° addendo siano $< \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{se } |x - y| < \delta$$

Usiamo la continuità di questa f_n: $\exists \delta$ t.c. $|x - y| < \delta$ $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

TEOREMA 2 (passaggio al limite sotto $\int$)

f_n, f Riemann-integrabili in $[a,b]$

$f_n \to f$ unif^{te} in $[a,b]$

Allora

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

cioè
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

DIM

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \le \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\le\, d(f_n,f)}\,dx \le$$

$$\le d(f_n,f)\,(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

Pb. La conv. uniforme mantiene la derivabilità?

f_n derivabile in I, $f_n \rightrightarrows f$ unif^{te} in $I \overset{?}{\Longrightarrow} f$ derivabile

NO.

Esempio $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ in $\mathbb{R}$

$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ puntualm.

$$d(f_n, f) = \sup_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sup_{[0,+\infty)} \Big(\underbrace{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x}_{\varphi(x)} \Big) = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\varphi'(x) = \frac{x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1/n}}{\sqrt{}} < 0$$

$f_n \to f$ unif^{te} ma f non derivabile.

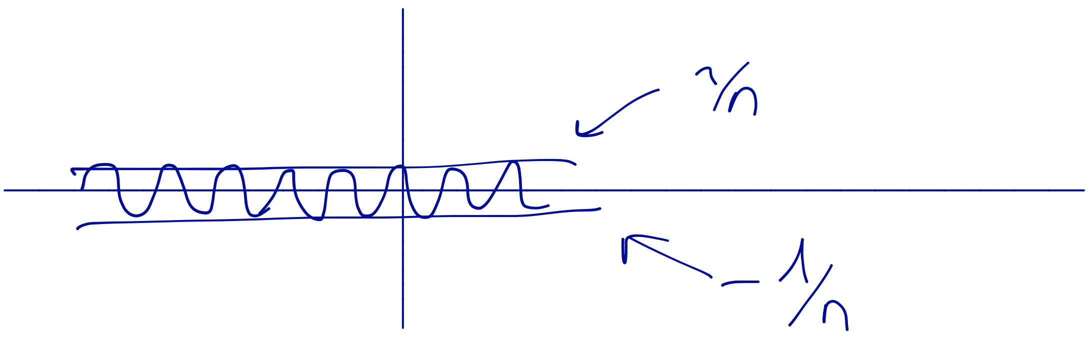
$f_n \to f$ unif^{te} $\quad f_n, f$ derivabili.

¿ $f_n' \to f'$? No

Esempio $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$, $\quad f(x) = 0$

$$d(f_n, f) = \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$f_n'(x) = \cos(nx) \not\longrightarrow f'(x) = 0.$$



I intervallo limitato

<u>TEOREMA</u> $\{f_n\}$ succ^{ne} di funzioni $C^1(I)$, supponiamo che

1) f_n' converga unif^{te} ad una funzione g.

2) $\exists x_0 \in I$ t.c. $\{f_n(x_0)\}$ converga.

Allora f_n converge unif^{te} in I. Inoltre, detta f il limite delle f_n, f è di classe $C^1(I)$, e $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in I$

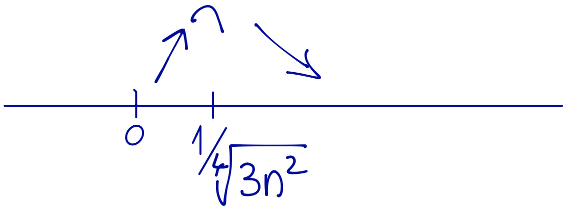
Studiare la conv. puntuale e uniforme di $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$

C.P. $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

C.U. in $\mathbb{R}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{[0,+\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^4} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}\right) = \frac{n\,\frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}}{1+\frac{\cancel{n^2}}{3\cancel{n^2}}} =$$

$$f_n'(x) = \frac{n\left[1+n^2x^4 - 4n^2x^4\right]}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n\left[1-3n^2x^4\right]}{(\quad)^2}$$



$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

non c'è conv. unif. in $\mathbb{R}$.

Per lo stesso motivo, non ci può essere convergenza uniforme in intervalli che "si avvicinano" all'origine

C.U. in $[\alpha, +\infty)$ con $\alpha > 0$? Sì!

$$\sup_{[\alpha,+\infty)} f_n(x) = f_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

OSS se n abb. grande (t.c. $\frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}} \leq \alpha$)

f_n decresc in $[\alpha, +\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^3 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx = 0$$ perché $f_n \rightrightarrows 0$ unif^{te} in $[2,3]$