oscllazioni

1. Le leggi che governano un sistema oscillante possono essere ricavate in maniera completa e rigorosa utilizzando principi fisici di base e strumenti matematici piuttosto semplici.
2. E’ piuttosto agevole riconoscere il rispetto di queste leggi nel comportamento di semplici oggetti come una molla, un lampadario che oscilla o un’altalena. Addirittura è possibile relizzare con poco sforzo qualche oscillatore meccanico su cui fare osservazioni e verifiche e poi complicare via via gli esperimenti, ad esempio realizzando l’accoppiamento di due di questi oscillatori.
3. Infine si può man mano scoprire che nel mondo che ci circonda moltissime cose, tra loro diversissime, si comportano in realtà come oscillatori. Le semplici leggi che avremo imparato ci aiuteranno quindi ad interpretare e comprendere fenomeni tra loro molto lontani per natura (dagli oscillatori meccanici ai circuiti elettrici) e per dimensioni (dalla scala atomica alla interpretazione delle orbite ellittiche dei pianeti).

Tutta la trigonometria che serve

scomposizione della posizione in due componenti.

seno e coseno di un angolo

relazione tra arco e angolo

gradi e radianti

- utilità di alcune rappresentazioni concrete

vettori, rappresentazione cartesiana e polare

il moto circolare uniforme

moto circolare

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin \varphi$

moto uniforme

$\varphi = \omega t$, dove $\omega = 2\pi/T$

$x = r \cos \omega t$

$y = r \sin \omega t$

modulo costante della velocità

$v = 2\pi r/T = \omega r$

da una semplice costruzione geometrica

$v_x(t) = -\omega r \sin \omega t$

$v_y(t) = \omega r \cos \omega t$

il moto circolare uniforme

moto circolare

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin \varphi$

moto uniforme

$\varphi = \omega t$, dove $\omega = 2\pi/T$

$x = r \cos \omega t$

$y = r \sin \omega t$

modulo costante della velocità

$v = 2\pi r/T = \omega r$

da una semplice costruzione geometrica

$v_x(t) = -\omega r \sin \omega t$

$v_y(t) = \omega r \cos \omega t$

abbiamo appena dimostrato che

la derivata di $\cos\omega t$ è $-\omega \sin\omega t$

e la derivata di $\sin\omega t$ è $\omega\cos\omega t$.

il moto circolare uniforme (2)

per analogia possiamo ricavare l'accelerazione

$a_x = -\omega^2 r \cos\omega t$

$a_y = -\omega^2 r \sin\omega t$

l'accelazione nel moto circolare uniforme vale in modulo $\omega^2 r$ ed è diretta come il raggio vettore ma in verso opposto.

è una accelerazione diretta verso il centro, o centripeta, come ci si deve aspettare dal secondo principio della dinamica se la forza responsabile del moto circolare uniforme è diretta verso il centro:

$f = m\omega^2 r$

$f_x = -m\omega^2 x$

$f_y = -m\omega^2 y$

moto armonico

$x(t) = r \cos \omega t$

$v(t) = -\omega r \sin \omega t$

$a(t) = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x(t)$

$f = ma$

$f = -m\omega^2 x = -kx$

Viceversa, se la forza è $f = -kx$, sappiamo che la legge oraria sarà un moto armonico.

moto armonico

$x(t) = r \cos \omega t$

$v(t) = -\omega r \sin \omega t$

$a(t) = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x(t)$

$f = ma$

$f = -m\omega^2 x = -kx$

Viceversa, se la forza è $f = -kx$, sappiamo che la legge oraria sarà un moto armonico.

Abbiamo appena risolto una equazione differenziale!

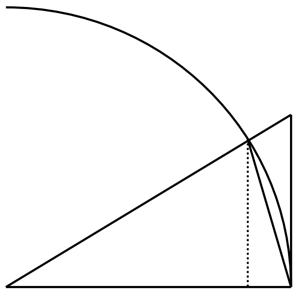
digressione su limiti e derivate

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$ dove $\varphi = a/r$ è il rapporto tra arco e raggio:

consideriamo le aree dei due triangoli e dello spicchio di cerchio indicati in figura: i due triangoli hanno entrambi base r e altezza rispettivamente $r\sin x$ e $r\tan x$,

mentre l'area dello spicchio può essere calcolata come frazione $\frac{\varphi}{2\pi}$ dell'area

della circonferenza: $\frac{\varphi}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\varphi r^2 = \frac{1}{2}ar$



$$\frac{1}{2}r^2\sin\varphi < \frac{1}{2}r^2\varphi < \frac{1}{2}r^2\tan\varphi$$

$$1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}$$

calcoliamo ora la derivata come limite del rapporto incrementale

$$f+\Delta f = \sin(\varphi+\Delta\varphi), f = \sin(\varphi)$$

$$\Delta f = \sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin(\varphi) = 2\sin\frac{\varphi+\Delta\varphi-\varphi}{2}\cos\frac{\varphi+\Delta\varphi+\varphi}{2}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta\varphi} = \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{2\varphi+\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cos\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta\varphi} = \cos\varphi$$

Tutte le dimostrazioni si basano sulla misura dell'angolo in radianti, ossia come rapporto di lunghezze

moto armonico

Se la forza è $f = -kx$, abbiamo dimostrato che la legge oraria sarà un moto armonico:

$$x(t) = r \cos \omega t$$

$$v(t) = -\omega r \sin \omega t$$

$$a(t) = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x(t)$$

ed dovendo essere (II principio)

$$f = ma$$

$$-kx(t) = -m\omega^2 x(t)$$

avremo $\omega^2 = k/m$

energia potenziale armonica

$x = x_0 \cos \omega t$

$v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t$

$v_{max} = \omega x_0$

$T = 1/2\ m\ v(t)^2 = 1/2\ m\ v_{max}^2 \sin^2 \omega t$

$E = T + U = 1/2\ m v_{max}^2 = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2$

$\Rightarrow$

$U(x) = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2\ (1 - \sin^2 \omega t) = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t = 1/2\ k\ x^2(t)$

Notate che abbiamo ricavato il potenziale armonico senza fare integrali.

con una derivata elementare possiamo vedere che la forza è la derivata del potenziale rispetto alla posizione

signicato di $f = -kx$ ("forza elastica")

- Se il punto è fermo in x=0, la forza è nulla
- il punto x=0 è tale che se mi allontano da esso verso destra o verso sinistra, la forza si oppone allo spostamento
- "forza di richiamo"
- il punto x=0 è una posizione di equilibrio stabile
- La forza elastica non è l'unico esempio di forza di richiamo

il pendolo

Un'altra forza di richiamo è quella a cui è soggetto un pendolo.

Le forze in gioco: un esercizio sulla scomposizione dei vettori (trigonometria!)

$-mg \sin\vartheta = ma_t$

$a_t = d^2s/dt^2$

$s = r\vartheta$ (solo se ϑ è misurato in radianti!)

$\sin\vartheta \approx \vartheta = s/r$ piccole oscillazioni!

$-mg\, s/r = m\, d^2s/dt^2$

$d^2s/dt^2 = -g/r\, s$

$s(t)$ moto armonico di pulsazione $\omega^2 = g/r$

l'approssimazione di piccolo angolo non è un caso...

se analizziamo il meccanismo di una qualunque forza di richiamo, è abbastanza intuitivo capire da dove nasce l'oscillazione

se cerchiamo di formalizzare, possiamo però avere qualche difficoltà

l’approssimazione di piccolo angolo non è un caso...

le difficoltà scompaiono immediatamente se usiamo il paradigma delle montagne russe

per una forza di richiamo, il punto centrale

- è un minimo del potenziale
- è un punto di equilibrio

l’approssimazione di piccolo angolo non è un caso...

le difficoltà scompaiono immediatamente se usiamo il paradigma delle montagne russe

per una forza di richiamo, il punto centrale

- è un minimo del potenziale
- è un punto di equilibrio

qualunque sistema oscilla intorno al suo punto di equilibrio

l'approssimazione di piccolo angolo non è un caso...

le difficoltà scompaiono immediatamente se usiamo il paradigma delle montagne russe

per una forza di richiamo, il punto centrale

- è un minimo del potenziale
- è un punto di equilibrio

qualunque sistema oscilla intorno al suo punto di equilibrio

tuttavia una oscillazione non è necessariamente un moto armonico

l’approssimazione di piccolo angolo non è un caso...

le difficoltà scompaiono immediatamente se usiamo il paradigma delle montagne russe

per una forza di richiamo, il punto centrale

- è un minimo del potenziale
- è un punto di equilibrio

qualunque sistema oscilla intorno al suo punto di equilibrio

tuttavia una oscillazione non è necessariamente un moto armonico

o sì?

conclusione sul moto armonico

abbiamo una oscillazione

- in ogni intorno di un punto di equilibrio stabile
- oppure in ogni minimo dell'energia potenziale
- oppure per ogni forza di richiamo

e in tutti questi casi

- le piccole oscillazioni sono armoniche

conservazione del momento angolare

- sistemi isolati
  - isotropia dello spazio
- forze centrali
  - momento della forza rispetto al centro nullo
- forze centrali a simmetria sferica (la forza dipende solo dal modulo di r)
  - la forza è conservativa, si conserva sia il momento angolare che l'energia totale

$$f = -\frac{a}{r^2} \quad \Rightarrow \quad L_{r_1 r_2} = f(r_2 - r_1) = -\frac{a}{r^2}(r_2 - r_1) \simeq -\frac{a}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = -\left(\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}\right)$$

$$L_{r_1 r_2} = V(r_1) - V(r_2) \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{a}{r}$$

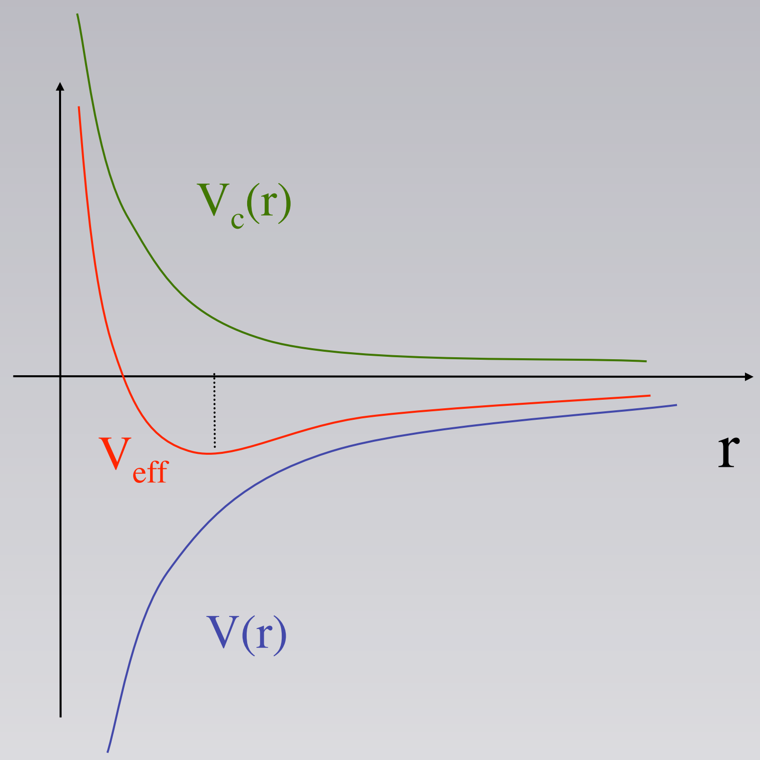
la prima legge di Keplero

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad \dot{\vartheta} = \omega = \frac{v}{r} = \frac{rmv}{mr^2} = \frac{p}{mr^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{M_S m_p}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r} = V_c(r) + V_G(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$



interpretazione del potenziale efficace

In un riferimento rotante col pianeta, questo è soggetto alla gravitazione, attrattiva e alla forza centrifuga, repulsiva.

E’ facile verificare che V_c rappresenta il potenziale della forza centrifuga:

essendo $\omega = \frac{v}{r} = \frac{rmv}{mr^2} = \frac{p}{mr^2}$

si ha

$$f_c = mr\omega^2 = mr\frac{p^2}{m^2r^4} = \frac{p^2}{mr^3}$$

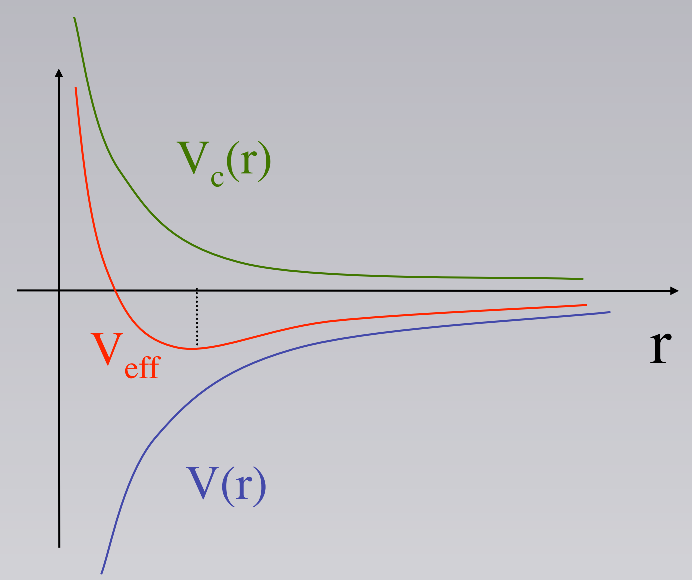
$$V_c = -\int f_c dr = -\int \frac{p^2}{mr^3} dr = -\frac{p^2}{m}\int \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{mr^2}$$

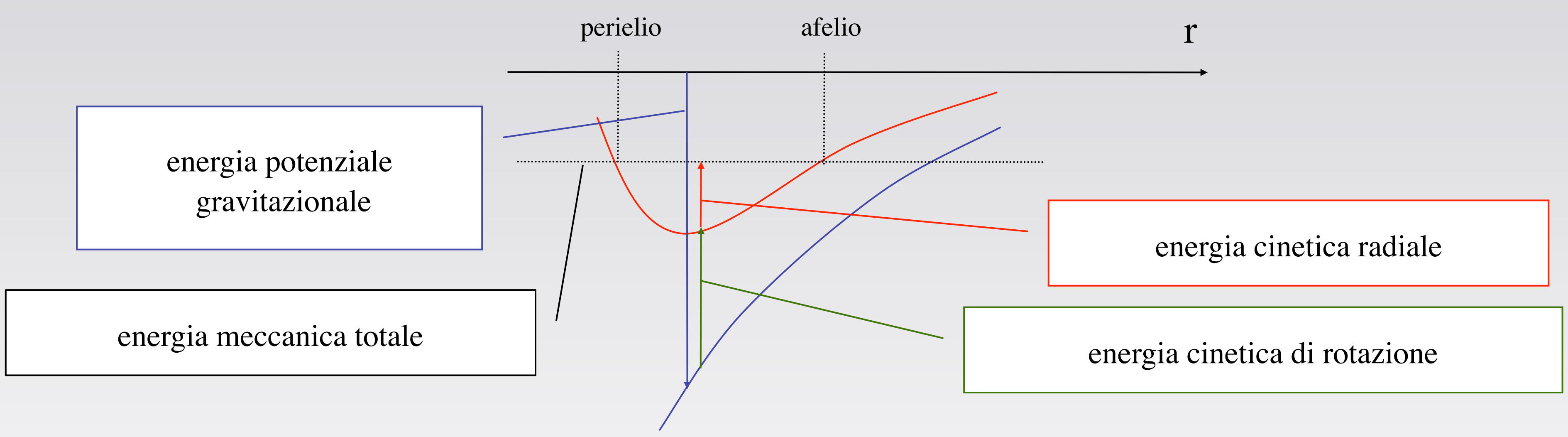
barriera centrifuga

Per piccoli r, domina V_c, per cui il pianeta non può cadere sul Sole, a grandi r domina V

Il pianeta non può allontanarsi indefinitamente se E<0.

Se E coincide col minimo di V_{eff}, l'orbita è perfettamente circolare, altrimenti il pianeta oscilla tra afelio (rmax) e perielio (rmin), descrivendo un'orbita ellittica.





generalità del risultato

qualunque sistema a due corpi che si attraggono

(dalle molecole biatomiche alle stelle doppie)

ha un potenziale analogo a quello di un pianeta intorno al sole: potenziale attrattivo + barriera centrifuga

(coservazione del momento angolare e dell’energia)

il pendolo conico

un modello del moto del pianeta

analogie e differenze

come evolve il moto in presenza di attrito

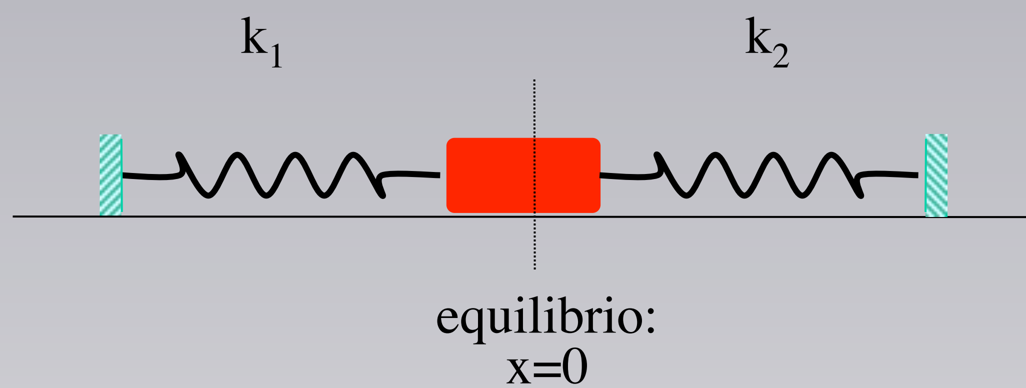
conseguenze della barriera centrifuga

forma a disco delle galassie: la attrazione gravitazionale può contrarre la galassia solo nella direzione ortogonale al piano di rotazione, mentre su di esso barriera centrifuga contrasta la contrazione

aumento dell'energia per contrazione: un corpo in rotazione che perda energia (per attrito, irraggiamento ecc.) aumenta paradossalmente la sua energia cinetica: infatti, diminuendo il momento angolare, il sistema si sposta verso raggi minori, ossia verso valori del potenziale gravitazionale maggiori in modulo. Quindi $K=-V/2$ aumenta.

Una nuvola di gas in rotazione che perde energia per irraggiamento si contrae, aumentando la sua energia cinetica (e quindi la sua temperatura), meccanismo che può innescare la combustione stellare.

oscillatore smorzato



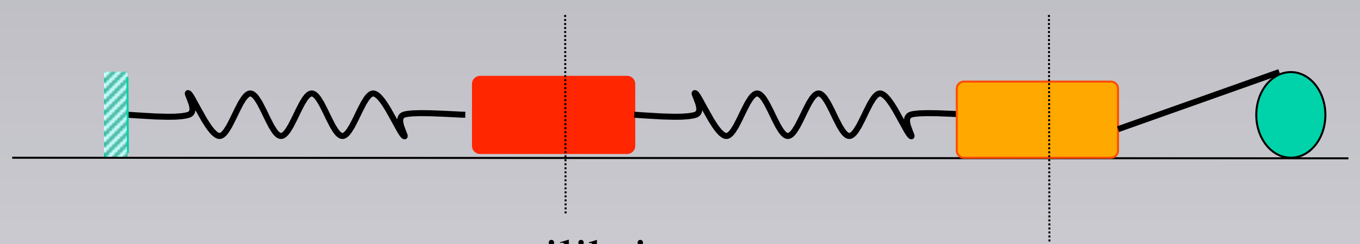
$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+(k_1+k_2)x=0$$

$$x(t)=C\exp\left(-\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\omega_s t$$

$$\omega_s=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\exp(\frac{\beta}{2m}T)$$

oscillatore forzato



$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - k_1 x - k_2(x - A\cos\omega t)$$

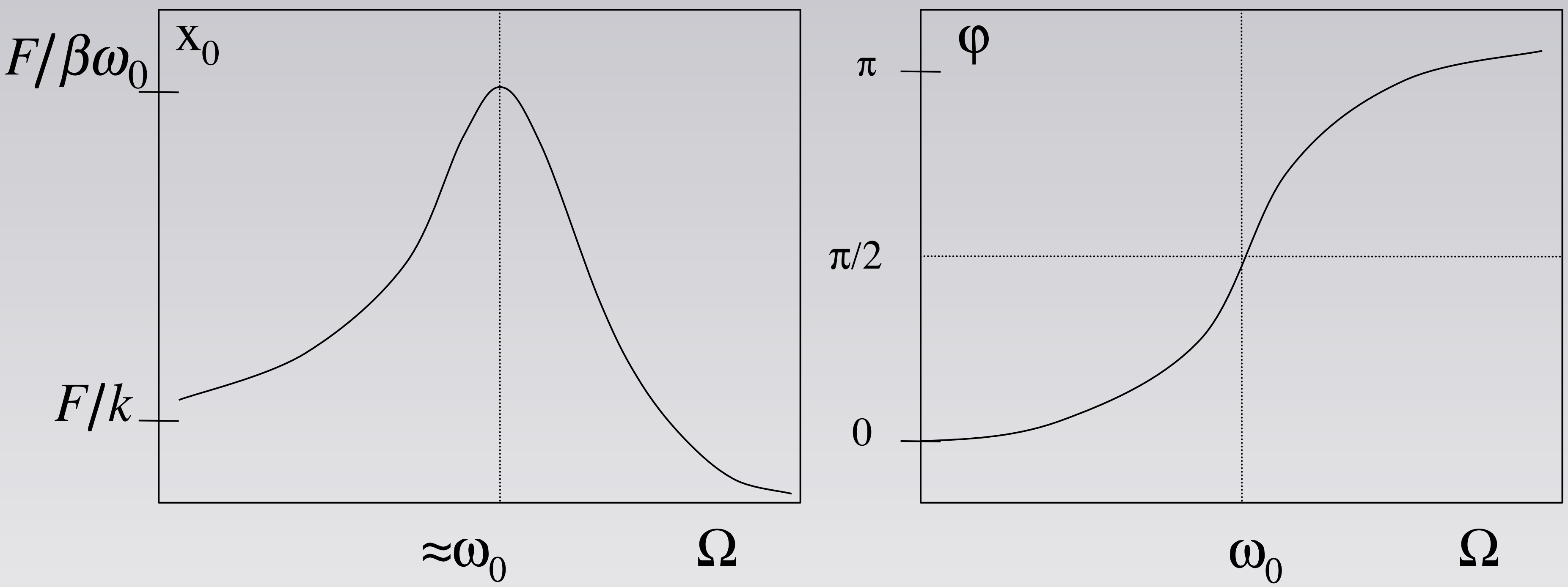
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 A\cos\omega t$$

$$x(t) = \frac{k_2 A}{m}\frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \beta^2 \frac{\omega^2}{m^2}}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{(k_1 + k_2) - m\omega^2}\right)$$

$$x_{\max} = \frac{k_2}{\beta\omega_0}A = \frac{k_2}{\beta}\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}A$$

ampiezza e fase in funzione della frequenza



dimostrazioni e laboratorio

tre lezioni-dimostrazione

o tre pomeriggi in laboratorio:

- oscillazioni: molla e pendolo, oscillazioni smorzate
- risonanza
- oscillatori accoppiati

In ogni caso le due opzioni si devono inserire in un percorso di meccanica nel quale le oscillazioni hanno un ruolo accentuato rispetto alle trattazioni tipiche

cosa serve?

- pendoli e molle
- binario a basso attrito con carrellini
- motorino rotante a velocità variabile

L’acquisizione on-line arricchisce enormemente la potenzialità, ma

non è strettamente necessaria

deve sempre essere utilizzata come un sussidio, non come il focus della dimostrazione (o del laboratorio)

sensori di posizione, dispositivi di acquisizione

varie opzioni, da adattare al percorso e alle risorse

Proposte per il laboratorio

molla con massa appesa

misura statica di k: allungamento con masse diverse

misura dinamica di k: misura del periodo delle oscillazioni

- col cronometro
- dalla legge oraria attraverso il sensore di posizione

isocronismo del pendolo

col cronometro, periodo con masse diverse

col cronometro, periodo con angoli diversi

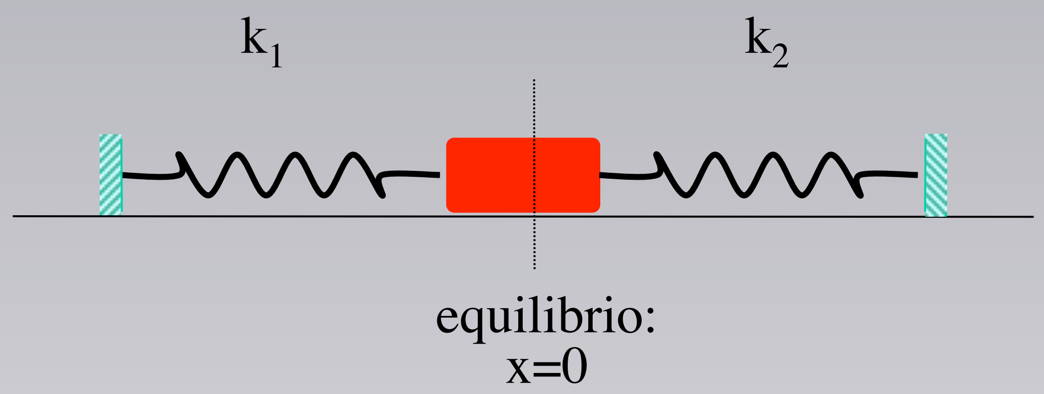
col sensore di posizione, raccogliere dati per qualche minuto partendo da un angolo di 20-30 gradi:

- attenuazione esponenziale dell’oscillazione
- variazione del periodo con l’angolo
- estrapolazione del periodo per angolo tendente a zero
- confronto col periodo teorico

oscillazione smorzata col carrellino

- determinazione del periodo col cronometro
- determinazione dell'attenuazione dell'ampiezza su una scala graduata
- registrazione e analisi della legge oraria (col sensore di posizione o di rotazione)
- confronto con la pulsazione teorica (non smorzata)

oscillatore smorzato

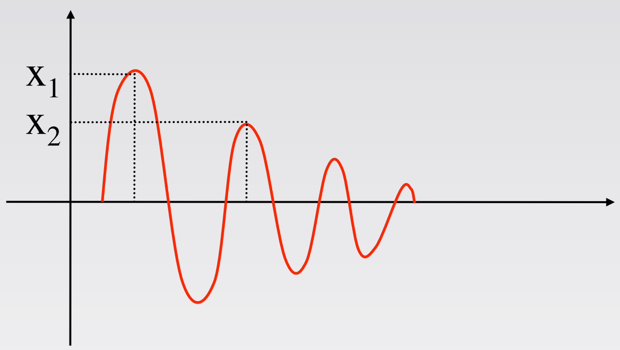


$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$x(t) = C\exp\left(-\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\omega_s t$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \exp(\frac{\beta}{2m}T)$$



?!

oscillatore stimolato da una forza periodica

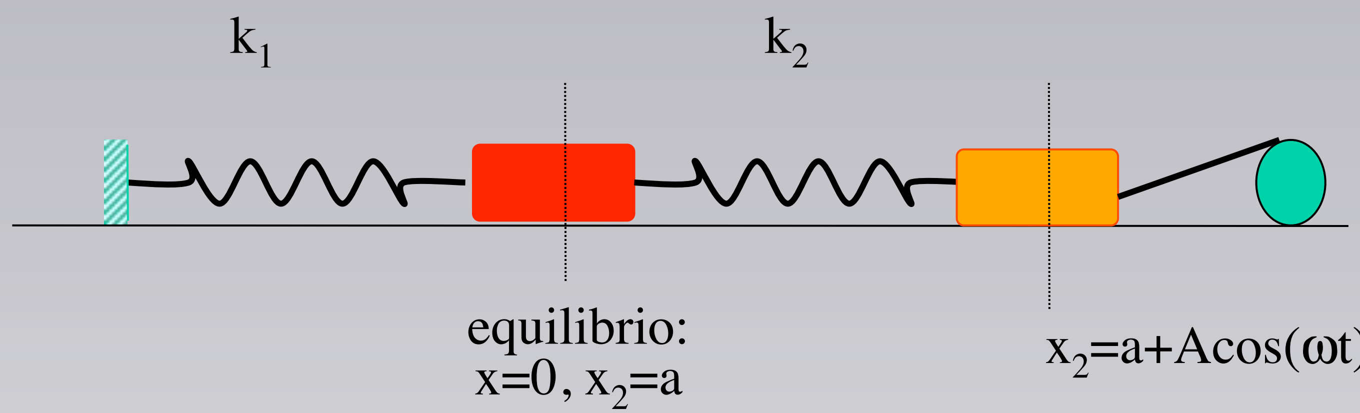
come si realizza in pratica

la curva di risonanza

- misurare le ampiezze massime sulla scala in centrimetri (o col sensore)
- costruire la curva per punti
- studiare il ruolo dell'attrito (aumentando la massa dei carrellini)

fase della risposta

oscillatore forzato



$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - k_1 x - k_2(x - A\cos\omega t)$$

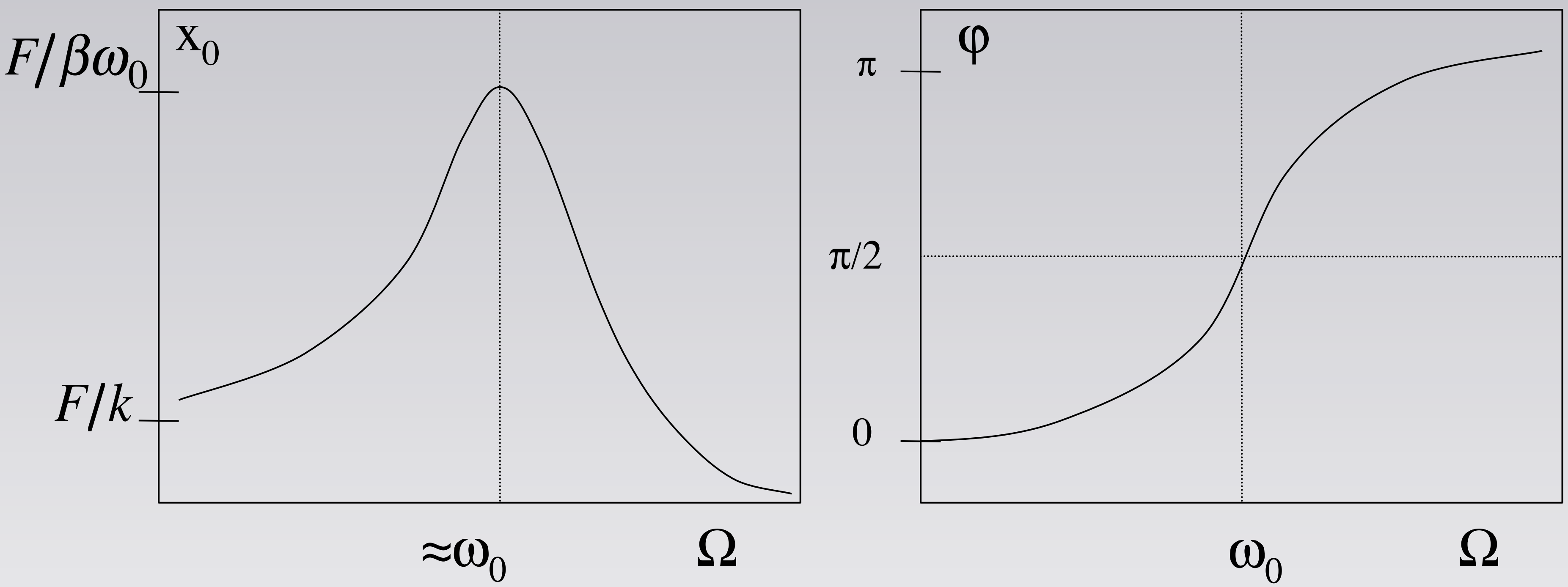
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 A\cos\omega t$$

$$x(t) = \frac{k_2 A}{m}\frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \beta^2\dfrac{\omega^2}{m^2}}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{(k_1 + k_2) - m\omega^2}\right)$$

$$x_{\max} = \frac{k_2}{\beta\omega_0}A = \frac{k_2}{\beta}\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}A$$

ampiezza e fase in funzione della frequenza



fattore di merito

Energia immagazzinata:

l'oscillatore assorbe tanta più energia quanto più lo stimolo ha una frequenza prossima alla risonanza

la larghezza della campana stabilisce la selettività dell'oscillatore (es. sintonizzazione di un segnale radio)

"fattore di merito": tanto migliore quanto più stretta è la campana

scambi energetici con gli oscillatori

Maggiore è Q (minore lo smorzamento) tanto più selettivo è l'oscillatore

cosa succede se $\beta \to 0, Q \to \infty$?

l'oscillatore non può scambiare energia con lo stimolo esterno: se la frequenza è diversa, la risposta è assente, se la frequenza è uguale, l'energia tende ad infinito, raggiungendo sicuramente il carico di rottura dell'oscillatore

ruolo della dissipazione

Notiamo che la maggior parte degli scambi di energia naturali ed artificiali si basa su onde (oscillazioni) e risonanza:

la radiazione eccita atomi e molecole intorno alla posizione di equilibrio

l'emissione e la ricezione del suono (naturale ed artificiale) si basa su meccanismi di oscillazione

la trasmissione e la ricezione di radiosegnali avviene tramite oscillazioni elettriche regolate dalle stesse leggi degli oscillatori meccanici

Ruolo della dissipazione negli scambi di energia!

senza dissipazione (attrito o altre forme) non sarebbe possibile lo scambio di segnali, ma neanche il trasferimento di energia dal sole alla terra attraverso la radiazione luminosa