CONFRONTO TRA INTEGRALI IMPROPRI E SERIE.

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergono se e solo se $\alpha > 1$.

TEOREMA

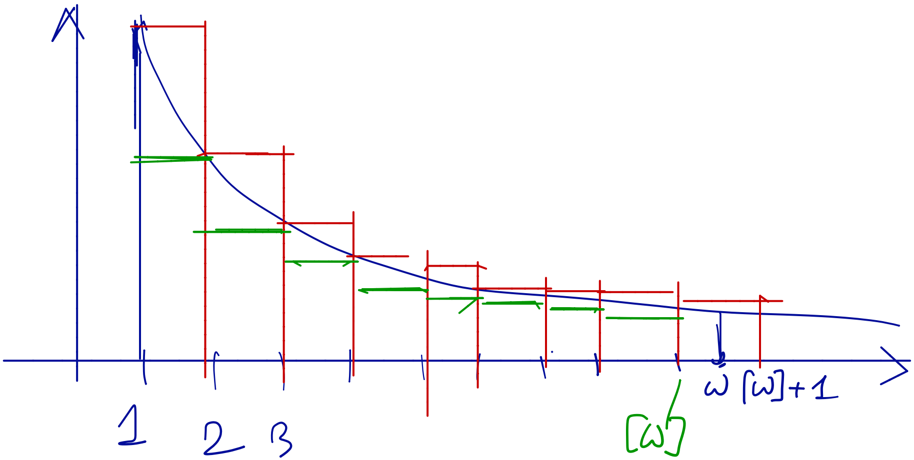
Sia $f: [1, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ decrescente.

Allora l'integrale improprio $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o entrambi divergenti).

Dim. Supponiamo che la serie converga.

$$\int_1^{\omega} f(x)\,dx \le \int_1^{[\omega]+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{[\omega]} f(n) \le \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)}_{c} < \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\omega} f(x)\,dx \le c \implies \text{L'integrale converge}$$



Supponiamo ora che la serie diverga

$$\int_1^{\omega} f(x)\,dx \geq \int_1^{[\omega]} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{[\omega]} f(n)$$

Se $\omega \to +\infty$, $[\omega] \to +\infty$, quindi la somma tende a $+\infty$

e quindi anche l'$\int$ diverge.

Esercizio:

Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$

Prendiamo $\alpha>0$, altrimenti il termine non è infinitesimo

OSS Se $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. la succ^{ne} è definitivam. decrescente, così come

Basta derivare $\varphi(x)=x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$$

Per il teorema, la Σ ha lo stesso carattere dell' int.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$$

1° Caso) $\alpha>1$. Considero $g(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$

compreso tra 1 e α

$$\int_2^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \cdot x^{\frac{\alpha+1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln x)^{\beta}} =$$

$$\frac{\alpha-1}{2} > 0 \qquad = 0$$

$\Longrightarrow$ (confr. asintotico) $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

2° caso) $0<\alpha<1$

Considero $\dfrac{\alpha+1}{2} \in (\alpha, 1)$

$g(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^{\beta}} = +\infty \quad \forall\beta.$$

$$\frac{1-\alpha}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ [C. Asintotico] $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

3) $\alpha = 1$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$$ converge se e solo se $\beta > 1$.

sost ($\ln x = t$)

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_2^{\omega} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \lim_{\omega \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln \omega} \frac{dt}{t^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

$\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1, \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{diverge se } \alpha < 1, \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{converge se } \alpha = 1, \ \beta > 1 \\ \text{diverge se } \alpha = 1, \ \beta \leq 1. \end{cases}$

<u>Esercizio</u>: Studiare $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}(\ln(\ln n))^{\gamma}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \quad \Big| \quad \not\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

f continua

Esempio:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \text{ converge}$$

suggerimento: sost $x^2 = t$ ...

ma $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x^2) \nexists$.

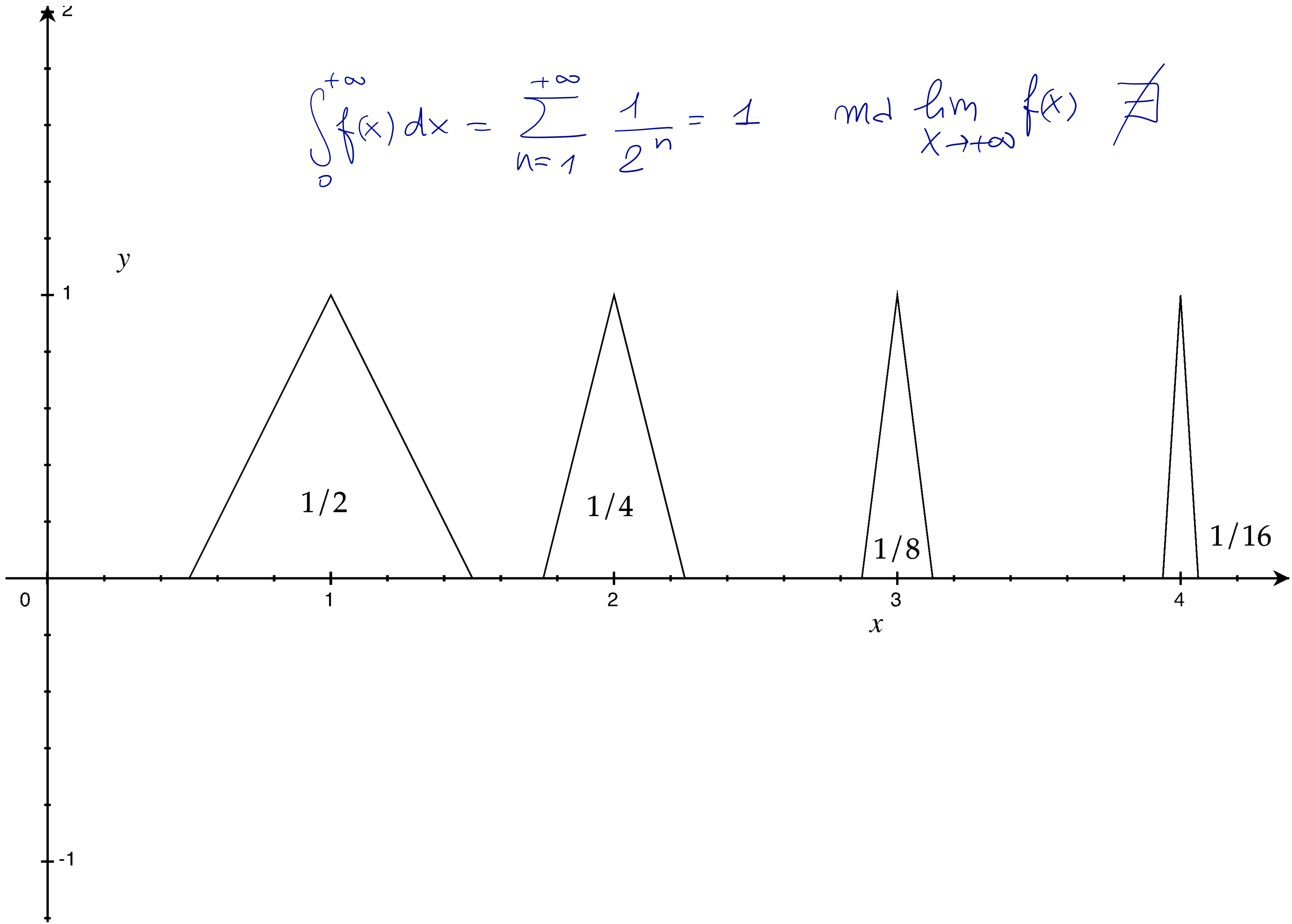
Tuttavia.

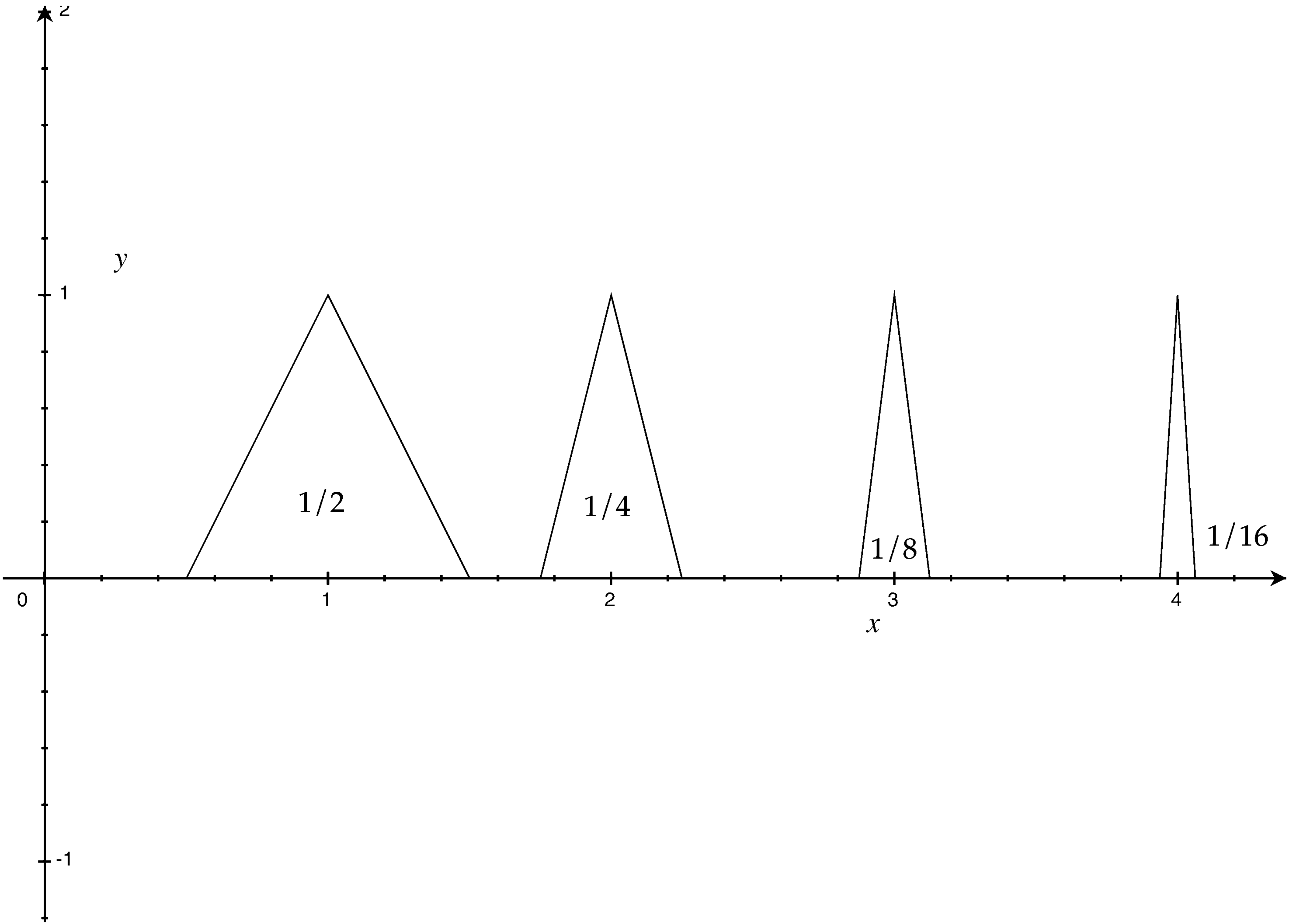
se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) \exists$,

allora questo limite vale zero.

dim. per esercizio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{ma} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \; \nexists$$




2
y
1
1/2
1/4
1/8
1/16
0
1
2
3
4
x
-1

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME DI SUCC.^{NI} DI FUNZIONI.

Sia $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tutte definite sullo stesso intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Diremo che f_n converge puntualmente a una funzione $f : I \to \mathbb{R}$

se $\forall x \in I \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, cioè

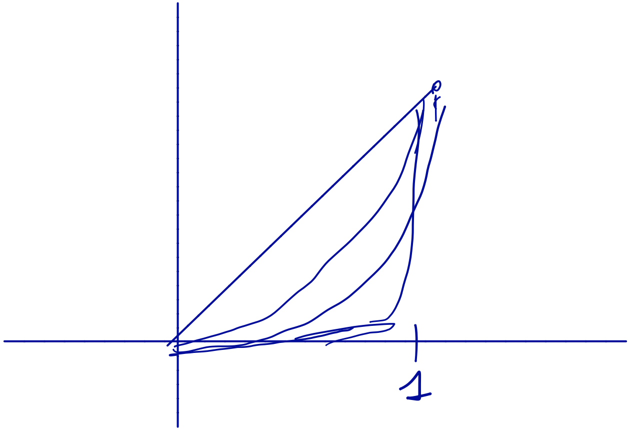
se $\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ n_{\varepsilon,x}$ t.c. $\forall n > n_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

<u>Esempio</u> $f_n(x) = x^n$ in $[0, +\infty)$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ +\infty & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

f_n converge puntualmente in $[0,1]$ a $f(x)$

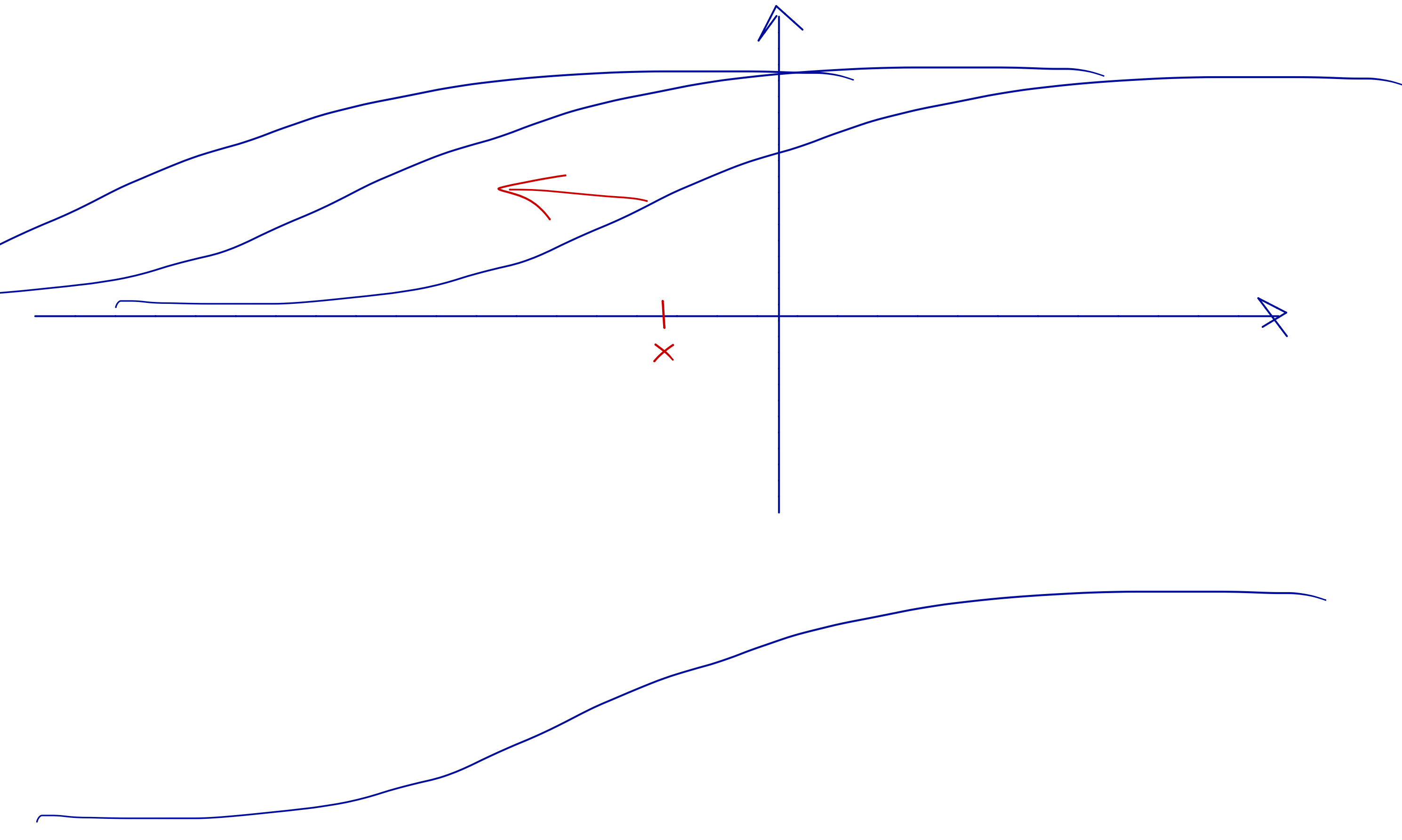
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



<u>OSS</u> Il limite puntuale di f_n continue potrebbe essere discontinuo.

$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x+n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f_n converge puntualmente a $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$



<u>OSS 1</u>. La conv. puntuale non conserva la continuità

<u>OSS 2</u>. La convergenza puntuale non permette di passare al limite sotto il segno di integrale

$I = [a,b]$ $\quad f_n, f$ Riemann - integrabili in $[a,b]$

f_n converga puntualmente a f in $[a,b]$

$$¿ \int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \; ?$$

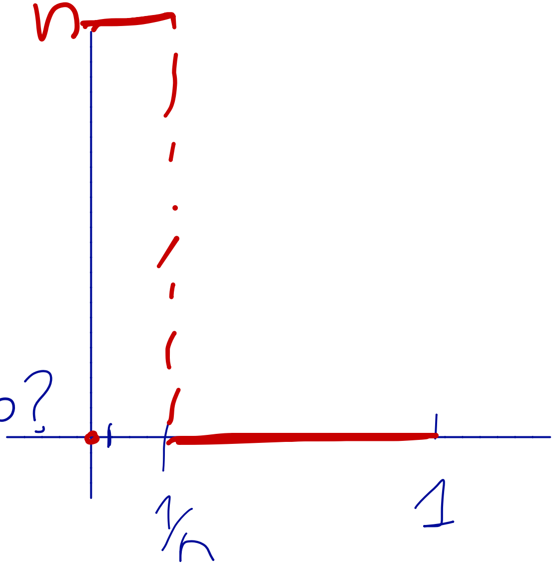
<u>No</u> in generale.

$0 \qquad x = 0$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

C.P. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \equiv f(x)$

¿ $\displaystyle\underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{=1\ \forall n} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 0$?



DEF $f_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. limitate in I.

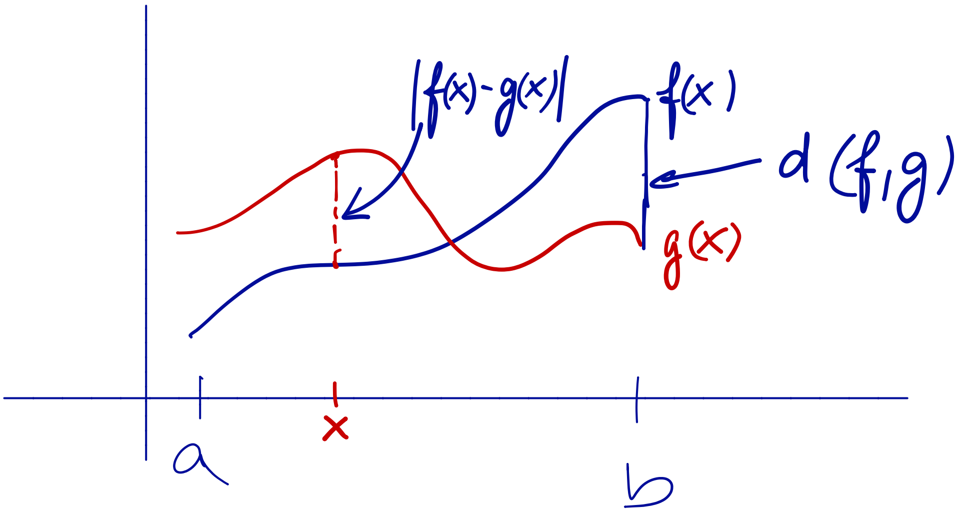
Diremo che f_n converge uniformemente a f in I se

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|}_{d(f_n, f) \text{ distanza tra } f_n \text{ e } f} = 0$$

cioè se.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ limitate

$$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$



OSS se $f_n \to f$ unif^{te} in I, allora

$$\underbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}_{\mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$}}} \xrightarrow{n} 0$$

$$|f_n(y) - f(y)| \quad \forall y \in I \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y) \ \forall y\in I$$

Cioè: La conv uniforme implica quella puntuale.

Esempio:

$f_n(x) = x^n$ conv. punt. a $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ in $[0,1]$

Converge uniformemente

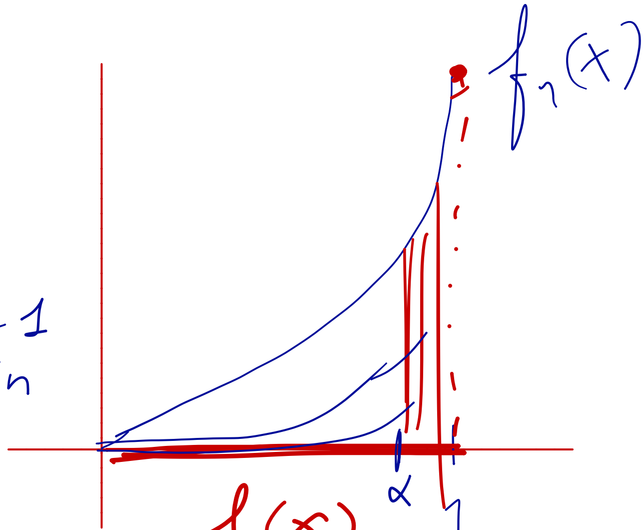
$$\underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|}\xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ?$$

$$\| $$

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)|$$

$$\| $$

$$\sup_{[0,1)} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \quad \forall n$$



$$d(f_n, f) = 1 \underset{\text{non si ha C.U. in } [0,1]}{\overset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}} 0$$

<u>OSS</u> Si ha conv. unif. in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ o in generale in ogni intervallo del tipo $[0, \alpha]$ con $0 < \alpha < 1$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [0,\alpha]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0,\alpha]} x^n = \alpha^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Non si ha c.u in $[0, 1)$

$$f_n(x) = x^{1/n} \qquad x \in [0,1]$$

C.P. $$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

<u>C.U.</u> $$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |x^{1/n} - f(x)| = \sup_{x\in(0,1]} |x^{1/n} - 1| =$$

$$= \sup_{x\in(0,1]} (1 - x^{1/n}) = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

non si ha C.U.

si ha C.U. in $[\alpha, 1]$ $\forall \alpha > 0$