UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
- Facoltà di Farmacia e Medicina -
Corso di Laurea in CTF

1 SIGNIFICATO DEL DETERMINANTE

Consideriamo il seguente problema:
trovare l'area del parallelogramma di vertici $O(0,0)$, $A(a,c)$, $Q(a+b,c+d)$ e $B(b,d)$ dati due punti $A(a,c) = (3,3/2)$ e $B(b,d) = (1,2)$

PRIMO METODO:
I.1) trovare al distanza tra l'origine $O(0,0)$ e $A(3,3/2)$ (ossia la base del parallelogramma)
I.2) scrivere l'equazione della retta r che passa per i punti $O(0,0)$ e $A(3,3/2)$
I.3) scrivere l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il punto $B(1,2)$
I.4) trovare le coordinate del punto H intersezione tra le rette r ed r' (OSSIA risolvere un sistema di equazioni lineari)
I.5) trovare la distanza tra i punti B ed H (ossia trovare l'altezza del parallelogramma)
I.6) l'area del parallelogramma è il prodotto base per altezza
(lo svolgimento con questo metodo è nella sezione successiva)

SECONDO METODO
II.1) considerare che l'area del parallelogramma si ottiene come l'area del rettangolo di vertici opposti l'origine $O(0,0)$ e $Q(a+b,c+d) = (3+1,3/2+2) = (4,7/2)$ meno l'area di alcuni rettangoli e triangoli le cui aree si calcolano facilmente (vedere la Figura 1)
II.2) calcolare l'area del rettangolo di vertici opposti l'origine $O(0,0)$ e $Q(a+b,c+d) = (3+1,3/2+2) = (4,7/2)$ (gli altri vertici sono $Q'(a+b,0) = (4,0)$ e $Q''(0,7/2)$)
II.3) calcolare le aree dei triangoli e dei rettangoli rimanenti (vedere la Figura 1)
II.4) utilizzare i conti fatti nei punti II.2 e II.3 per calcolare l'area del parallelogramma con il metodo del punto II.1

(lo svolgimento con questo metodo è spiegato in generale con le lettere invece che con i numeri nella pagina seguente)

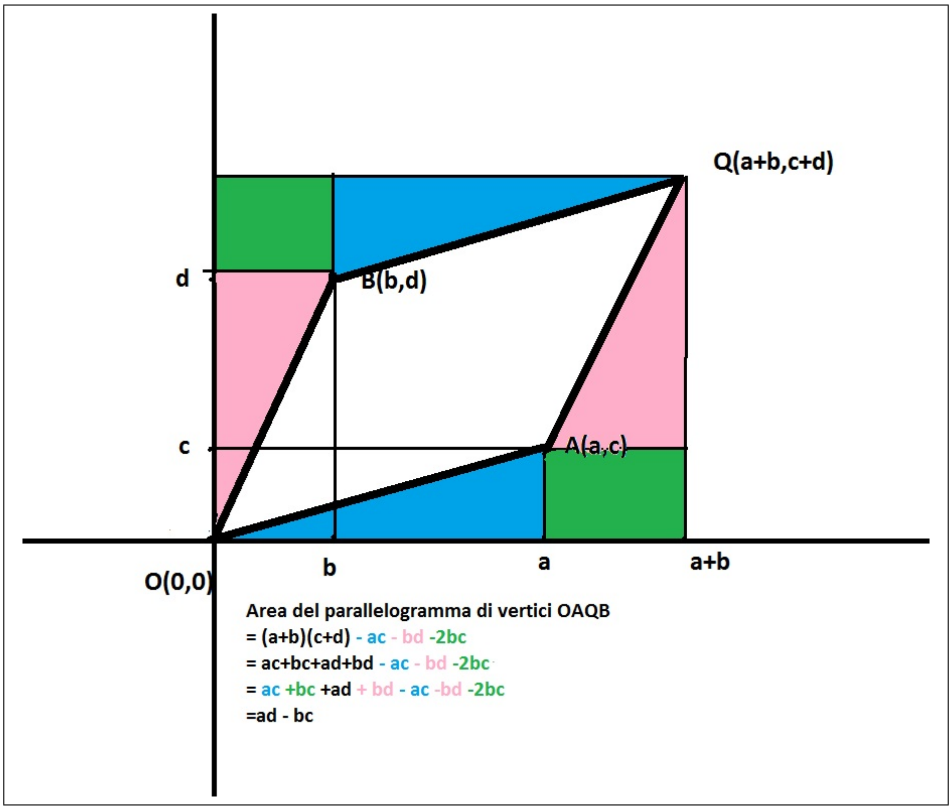

Figure 1: I due rettangoli verdi hanno ciascuno area bc, infatti hanno vertici rispettivamente di coordinate
il primo in alto a sinistra: $(0,d)$, (b,d), $(b,c+d)$ e (0,c+d) e uindi base b e alteza c
l'ultimo in basso a destra: $(a,0)$, $(a+b,0)$, $(a+b,c)$ e (a,c)
i due triangoli rosa sono uguali e hanno ciascuno area $bd/2$, in quanto sono entrambi triangoli rettangoli e con cateti b e d, infatti hanno vertici rispettivamente di coordinate
il primo a sinistra $(0,0)$, (b,d) e $(0,d)$
il secondo a destra (a,c), $(a+b,c)$ e $(a+b,c+d)$
i due triangoli azzurri sono uguali e hanno ciascuno area $ac/2$, in quanto sono entrambi triangoli rettangoli e con cateti a e c, infatti hanno vertici rispettivamente di coordinate
il primo in basso $(0,0)$, $(a,0)$ e (a,c)
il secondo in alto (b,d), $(a+b,c+d)$ e $(b,c+d)$

Di conseguenza l'area del parallogramma è data da
l'area totale del rettangolo grande di vertici opposti l'origine e Q, che ha area $(a+b)(c+d)$,
meno l'area delle figure in verde che in totale è $2bc$,
meno l'area delle figure in rosa, che in totale è $2bd/2 = bd$,
meno l'area delle figure in azzurro, che in totale è $2ac/2 = ac$, e quindi

$$\begin{aligned} Area\,del\,parallelogramma &= (a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac = ac + ad + bc + bd - 2bc - bd - ac \\ &= ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

TERZO METODO

Da quanto visto nella pagina precedente è chiaro che basta calcolare il determinate della matrice con prima riga (a, b) e seconda riga (c, d) o meglio con prima colonna il vettore $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e con seconda colonna il vettore $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, ossia

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = 32 - 1(3/2) = (12 - 3)/2 = 9/2$$

SPIEGAZIONE GENERALE DELLA CONNESSIONE CON LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI due per due

COME ABBIAMO VISTO nel file "SISTEMI LINEARI due per due", utilizzando la trasformazione

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

l'origine $O(0, 0)$ va in se stesso, il punto di coordinate $(1, 0)$ va nel punto $A(a, c)$, il punto di coordinate $(1, 1)$ va in $Q(a+b, c+d)$, il punto di coordiante $(0, 1)$ va nel punto $B(b, d)$ e analogamente tutti i punti del quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ vanno nel parallelogramma di vertici $O(0, 0)$, $A(a, c)$, $Q(a + b, c + d)$ e $B(b, d)$.

Il fatto che l'area del parallelogramma sia diversa da zero, corrisponde al fatto che la retta che passa per l'origine $O(0, 0)$ e il punto $A(a, c)$ e quella che passa per l'origine e il punto $B(b, d)$ sono sghembe. Invece le due rette sono parallele se e solo se l'area del parallelogramma si riduce a zero ossia se $A(a, c)$ e $B(b, d)$ sono sulla stessa retta. In tale caso il sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ha soluzione solo se il punto di coordinate (e, f) si trova sulla stessa retta alla quale appartengono sia $A(a, c)$ che $B(b, d)$ (e in tale caso ci sono infinite soluzioni) e altrimenti non ci sono soluzioni.

2 SOLUZIONE ESPLICITA con il PRIMO METODO

La soluzione con il primo metodo è utile come ripasso di diverse nozioni e di alcuni metodi visti in precedenza

I.1) trovare al distanza tra l'origine $O(0,0)$ e $A(3,3/2)$ (ossia la base del parallelogramma)
La distanza fra due punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ è

$$dist(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

e quindi

$$dist(O,A)=\sqrt{(0-3)^2+(0-\frac{3}{2})^2}=3\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

I.2) scrivere l'equazione della retta r che passa per i punti $O(0,0)$ e $A(3,3/2)$
L'equazione della retta che passa per due punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ è

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

e quindi l'equazione della retta r è

$$\frac{y-0}{\frac{3}{2}-0}=\frac{x-0}{3-0}\quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2}x$$

(del resto una retta che passa per l'origine, a parte l'asse delle ordinate, ossia $x=0$, è del tipo $y=mx$, ed $m=\tan(\theta)$ dove θ è l'angolo che forma la retta con l'asse delle ascisse)
I.3) scrivere l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il punto $B(1,2)$
Due rette di equazione $y=mx+q$ e $y=m'x+q'$ sono perpendicolari se e solo se $mm'+1=0$ ovvero, per $m\neq 0$, se e solo se

$$m'=-\frac{1}{m},$$

inoltre una retta $y=m'x+q'$ passa per un punto $P_0(x_0,y_0)$ se e solo se è del tipo

$$y-y_0=m'(x-x_0).$$

Quindi l'equazione della retta r' è

$$y-2=-2\,(x-1)\quad\Leftrightarrow\quad y=-2x+4$$

I.4) trovare le coordinate del punto H intersezione tra le rette r ed r' (OSSIA risolvere un sistema di equazioni lineari)
Le coordinate del punto H sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\,x \\ y=-2x+4 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} y=\frac{1}{2}\,x \\ \frac{1}{2}\,x=-2x+4 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} y=\frac{1}{2}\,x \\ \frac{5}{2}\,x=4 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} y=\frac{4}{5} \\ x=\frac{8}{5} \end{cases}$$

e quindi H ha coordinate $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$

I.5) trovare la distanza tra i punti B ed H (ossia trovare l'altezza del parallelogramma)

Come nel punto I.1 si ha

$$dist(B,H) = \sqrt{(1-\tfrac{8}{5})^2 + (2-\tfrac{4}{5})^2} = \sqrt{(\tfrac{5-8}{5})^2 + (\tfrac{10-4}{5})^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{5})^2 + (\tfrac{6}{5})^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3^2+3^2\cdot 2^2}{5^2}} = \tfrac{3}{5}\sqrt{1+4} = \tfrac{3}{5}\sqrt{5}$$

I.6) l'area del parallelogramma è il prodotto base per altezza

$$AREA = base \times altezza = \frac{3}{2}\sqrt{5} \times \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{9}{2}$$