CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f, g : [a,b) \longrightarrow (0,+\infty)$, Riemann-integrabili in $[a,\omega]$ $\forall \omega \in (a,b)$ t.c.

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

1) Se $\lambda \in (0,+\infty)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o entrambi divergenti)

2) se $\lambda = 0$, allora se $\int_a^b g$ converge, anche $\int_a^b f$ converge

$\Downarrow$ quindi

se $\int_a^b f$ diverge, anche $\int_a^b g$ diverge

non posso dire nulla se $\int_a^b g$ diverge

3) se $\lambda = +\infty$

come 2), ma a ruoli di f e g scambiati

ESERCIZIO

Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+3x^2}\,dx$

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+3x^2} = f(x)$$

Pb solo per $x \to 0^+$

per $x \to 0^+$ $\quad \operatorname{arctg}\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$

$$x\sqrt{x}+3x^2 \sim x^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \text{l'integrale diverge}$$

TABELLA DELLE FUNZIONI "CAMPIONE" CON CUI FARE IL CONFRONTO.

	Funz. campione	
$x \to +\infty$	$\frac{1}{x^\alpha}$	l'integrale $\int^{+\infty}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$
$x \to x_0^+$	$\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ $\Bigg\}$ $\frac{1}{\lvert x-x_0\rvert^\alpha}$	converge sse $\alpha < 1$
$x \to x_0^-$	$\frac{1}{(x_0-x)^\alpha}$	"
$x \to -\infty$	$\frac{1}{(-x)^\alpha}$	converge sse $\alpha > 1$

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{6 + x^2 + x \ln x + x\sqrt{x}\, \operatorname{sen} x}$$

OSS Il denominatore è sempre > 0 per $x \geq 5$

$$6 + x^2 + x\ln x + x\sqrt{x}\, \operatorname{sen} x \sim x^2$$

$\Rightarrow f(x) \sim \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow$ l'integrale converge

ESERCIZIO

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$$

$$\text{"} f(x)$$

per $x \to 0^+$ $\quad \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$

$\int$ converge sse $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$

ESERCIZIO

Al variare di $\alpha > 0$, studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\alpha} \, dx$$

Esercizio. Studiare il caso $\alpha < 0$.

Pb per $x \to \frac{\pi}{2}^-$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\sim 1}}{\cos x} \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \implies f(x) \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha}}$$

L'$\int$ converge sse $\alpha < 1$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \frac{\pi}{2} - x$$

ESERCIZIO

Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{|\log x|^\alpha}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}}_{= f(x)} dx$$

Pb per $x \to 0^+$, $x \to 1^-$, $x \to 1^+$, $x \to +\infty$

Studio i seguenti int. impropri:

$$\underbrace{\int_0^{1/2} f(x)\,dx}_{A}, \quad \underbrace{\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx}_{B}, \quad \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{C}, \quad \underbrace{\int_2^{+\infty} f(x)\,dx}_{D}$$

C $x \to 1^+$ $\quad \log x = \log(1+(x-1)) \sim x-1$

$$f(x) \sim \frac{|x-1|^\alpha}{8\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{8(x-1)^{1/3-\alpha}} \Rightarrow f \text{ def}^{te} \text{ positiva per } x \to 1^+$$

(C) converge sse $\frac{1}{3} - \alpha < 1 \iff \boxed{\alpha > -\frac{2}{3}}$

(B) $x \to 1^-$

$$f(x) \sim \frac{|x-1|^\alpha}{8\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(1-x)^\alpha}{-8\,(1-x)^{1/3}} = -\frac{1}{8\,(1-x)^{1/3-\alpha}}$$

f def^{te} <u>negativa</u> per $x \to 1^-$

$$-f(x) \sim \frac{1}{8\,(1-x)^{1/3-\alpha}}$$ $\Rightarrow$ l'int. (B) converge sse $\frac{1}{3} - \alpha < 1$ cioè $\alpha > -\frac{2}{3}$

(D) $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{(\log x)^\alpha}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{(\log x)^\alpha}{x^{4/3}}$$

se $\alpha \leq 0$ $\quad \frac{(\log x)^\alpha}{x^{4/3}} \leq \frac{1}{x^{4/3}}$ l'int. converge

Scelgo un numero compreso tra 1 e $\frac{4}{3}$, per es. $\frac{7}{6}$

$$\frac{\left(\frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{4/3}}\right)}{\left(\frac{1}{x^{7/6}}\right)} = \frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{4/3}}\, x^{7/6} = \frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{1/6}} \longrightarrow 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\int^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}}\,dx$ converge $\Rightarrow \int^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

$\Rightarrow$ D converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(A) $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{(-\log x)^\alpha}{-7} \quad f \text{ def}^{te} \text{ negativa per } x \to 0^+$$

$$-f(x) \sim \frac{(-\log x)^\alpha}{7}$$

$-\log x \to +\infty$ per $x \to 0^+$ "molto lentamente", cioè

$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta (-\log x)^\alpha = 0 \qquad \forall \beta > 0$$

$$\frac{-f(x)}{\left(1/\sqrt{x}\right)} = \sqrt{x}\,(-f(x)) \sim \frac{\sqrt{x}\,(-\log x)^\alpha}{7} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

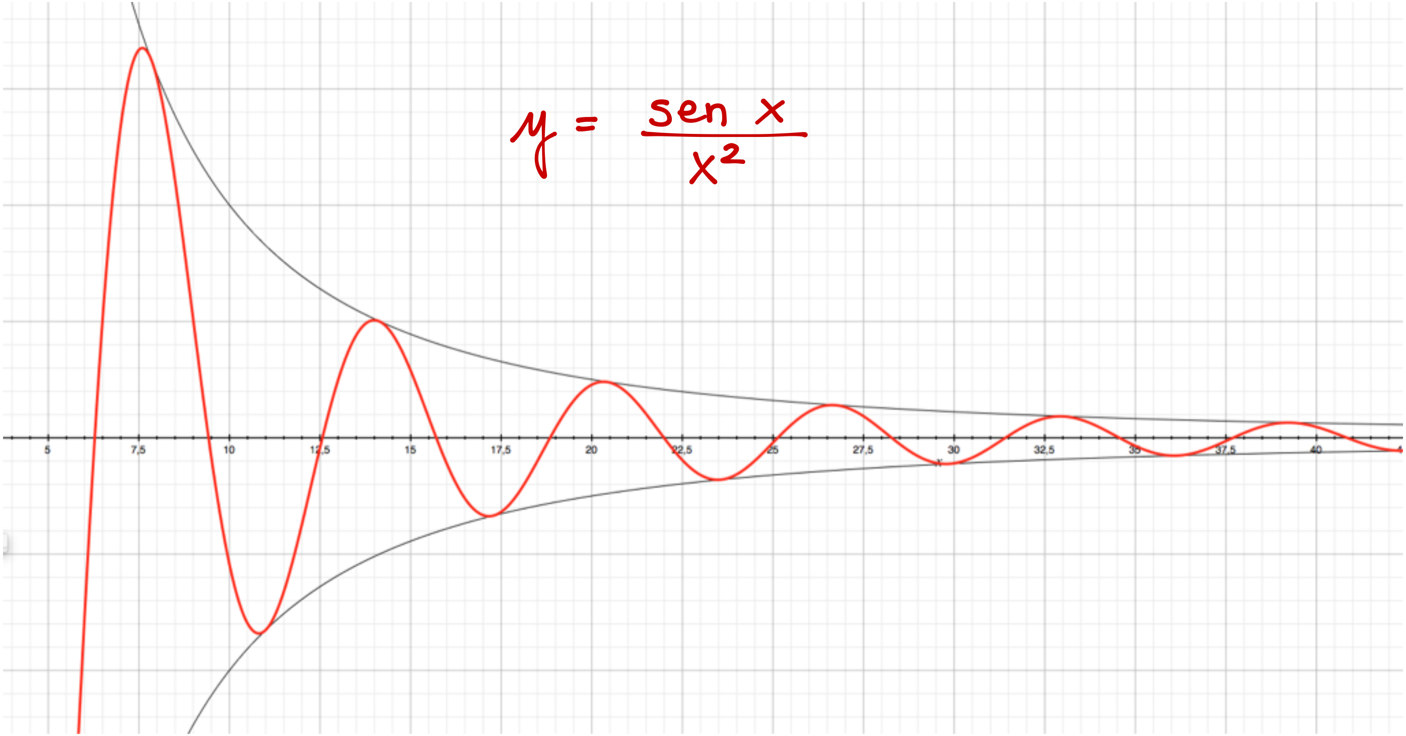
$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge $\Rightarrow \int_0^{1/2} (-f(x))\,dx$ converge $\Rightarrow$ (A) converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Complessivamente l'integrale dato converge sse $\alpha > -\frac{2}{3}$

ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

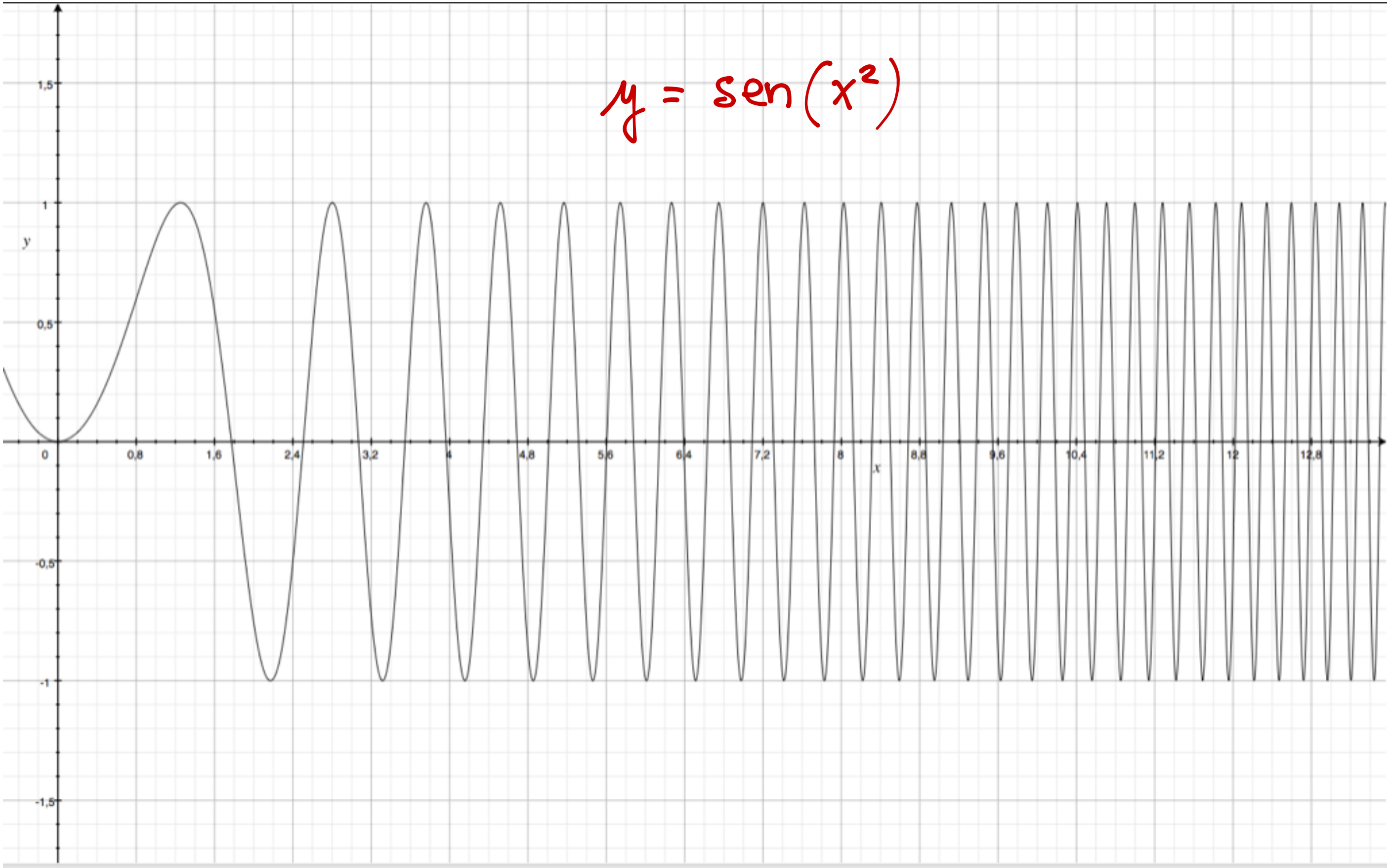
Finora abbiamo studiato integrali impropri di funzioni a segno (definitivamente) costante

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$



$$y = \frac{\text{sen}\, x}{x^2}$$

$y = \text{sen}(x^2)$



DEF. $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, Riemann-integrabile in $[a,\omega]$ $\forall \omega \in (a,b)$. Diremo che f è <u>assolutamente integrabile</u> in $[a,b)$ se esiste finito l'integrale improprio

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

TEOREMA

f assolutamente integrabile in $[a,b) \Longrightarrow f$ integrabile in $[a,b)$

e inoltre

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

dis. triangolare

ESEMPIO

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ converge} \overset{\text{confr.}}{\Longrightarrow} \int^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\, dx \text{ converge} \Longrightarrow$$

$$\overset{(C.A)}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \text{ converge}$$

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

ESERCIZIO.

Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x}\,\cos(x^2)}{\sqrt{27x^3-1}}}_{f(x)}\,dx$

Pb per $x \to \frac{1}{3}^+$ e $x \to +\infty$

$$\int_{1/3}^{1} f(x)\,dx \qquad \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$$

A $\qquad\qquad$ B

$$27x^3-1 = 27\left(x^3-\frac{1}{27}\right) =$$

$$= 27\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}+\frac{x}{3}\right) \qquad \Delta < 0$$

$\sim 1/3$

A $\quad x \to \frac{1}{3}^+$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cos\left(\frac{1}{9}\right) \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}\,\sqrt{9}} = \frac{c}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^{1/2}}$$

$\Rightarrow$ f def$^{\text{te}}$ positiva per $x \to \frac{1}{3}^+$ e l'int. A converge

(B) usiamo la C. A.

$$|f(x)| \le \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{27x^3-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{27}\, x^{3/2-1/3}} = \frac{1}{\sqrt{27}\, x^{7/6}}$$

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} \text{ converge} \Rightarrow \int^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ converge} \overset{C.A.}{\Longrightarrow}$$

(B) Converge.

L'integrale dato converge

OSS. Il criterio della conv. assoluta è una condizione Sufficiente per la conv dell'integrale

Non è una C.N.

$\exists$ funzioni il cui integrale converge ma non assolutam.

ESEMPIO.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$ converge, ma non assolutamente.

1) L'int. converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = (*)$$

$$\| $$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left(-\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{\omega} - \int_1^{\omega} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right)$$

$$(*) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$ converge perché conv. assolut.

$\Longrightarrow$ converge

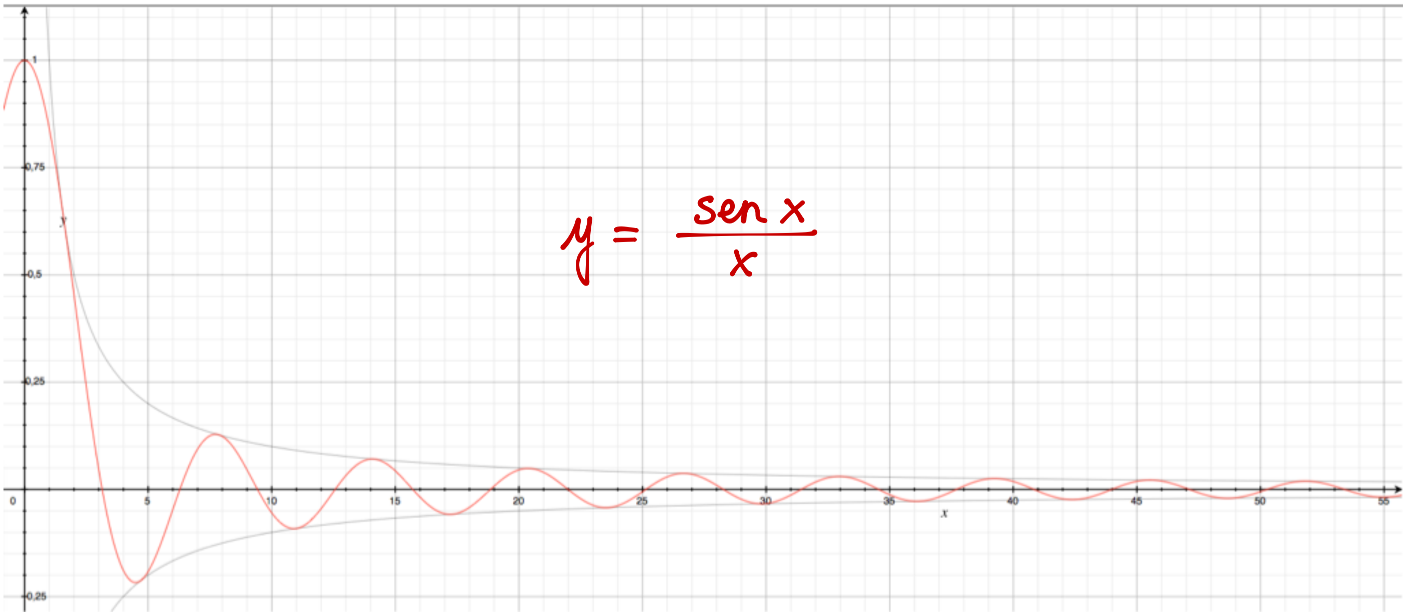
2) L'int. non converge assolutamente

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$$

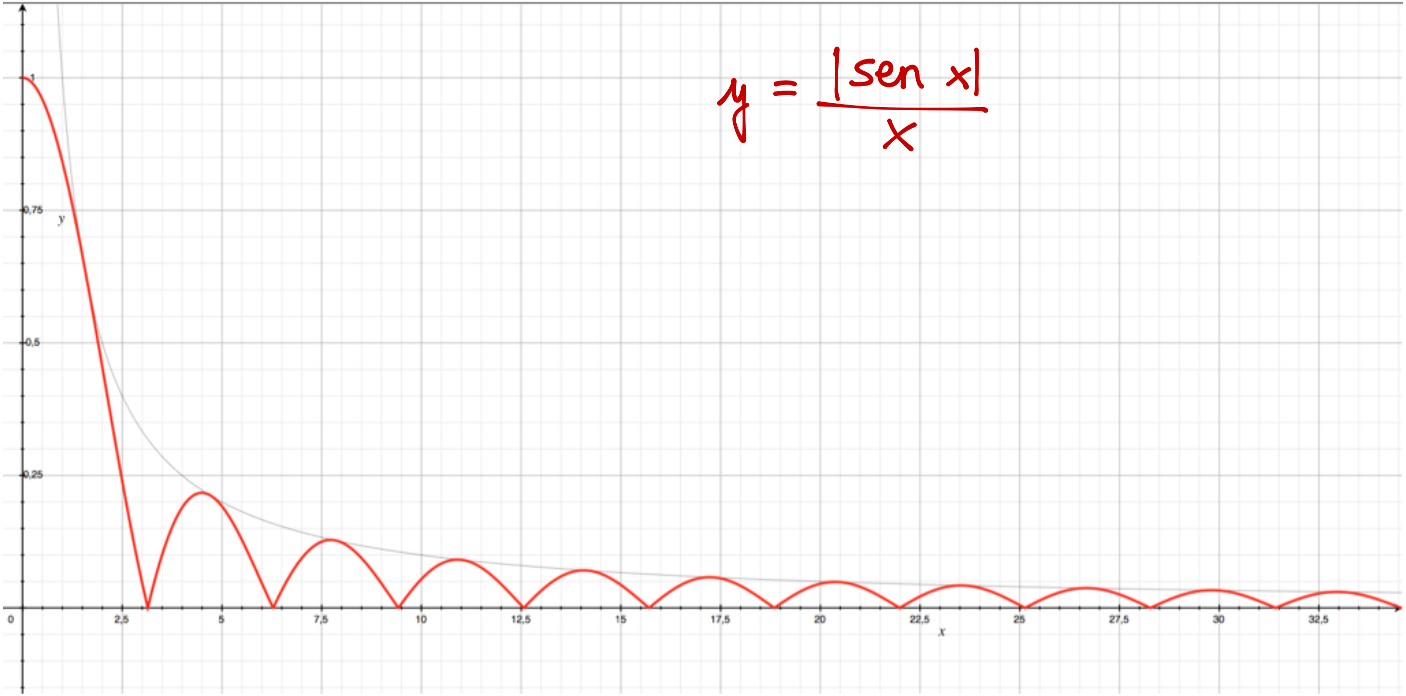
$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx}_{= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

divergenza della $\sum$ armon.



$y = \frac{\text{sen } x}{x}$
1
0,75
0,5
0,25
-0,25
y
x
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55


$y = \frac{|\text{sen } x|}{x}$
1
0,75
y
0,5
0,25
0
2,5
5
7,5
10
12,5
15
17,5
20
22,5
25
27,5
30
32,5
x