UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"

- Facoltà di Farmacia e Medicina -

Corso di Laurea in CTF

1 Sistemi di equazioni lineari

Sia dato un sistema di equazioni lineari in due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Se, ad esempio, $a = 0$ e $b \neq 0$ allora il sistema diventa

$$\begin{cases} by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e}{b} \\ cx + dy = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e}{b} \\ cx + d\dfrac{e}{b} = f \end{cases}$$

A questo punto, didstinguiamo due casi $\boxed{c \neq 0}$ e $\boxed{c = 0}$

- $\boxed{\text{se } c \neq 0}$ c'è una e una sola soluzione del sistema ed è $\begin{cases} x = \dfrac{1}{c}\left[f - d\dfrac{e}{b}\right] = \dfrac{fb - ed}{bc} \\ y = \dfrac{e}{b} \end{cases}$

- $\boxed{\text{se } c = 0}$ ci sono solo due casi:
  - $\boxed{d\,\dfrac{e}{b} = f}$ e allora ci sono infinite soluzioni del tipo $x = \alpha$ $y = d\frac{e}{b}$

  oppure
  - $\boxed{d\,\dfrac{e}{b} \neq f}$ e allora non ci sono soluzioni.

Un ragionamento analogo vale se $c = 0$ e $d \neq 0$, iniziando dalla seconda equazione per cui necessariamente $y = \dfrac{f}{d}$, o anche se $a \neq 0$ e $b = 0$ (ma stavolta cominciando con $x = \dfrac{e}{a}$) o ancora se $c \neq 0$ $d = 0$.

ESEMPI

$$\begin{cases} 2y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3/2 \\ 4x + 3/2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3/2 \\ 4x = 1 - 3/2 \quad \Leftrightarrow \; x = -1/8 \end{cases}$$

Verifica

calcoliamo $\begin{cases} 2y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ per $x = -1/8, y = 3/2$ $\begin{cases} 2(3/2) = 3 & OK \\ 4(-1/8) + 3/2 = 1 & \Leftrightarrow -1/2 + 3/2 = 1 \; OK \end{cases}$

Per completezza mettiamo anche il seguente caso banale in cui $a = 0$ $b = 0$, MA NON E' NECESSARIO GUARDARLO

$\boxed{\text{se } a = 0 \ b = 0}$ chiaramente il sistema diventa

$$\begin{cases} 0 = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

• se $e \neq 0$ non ammette nessuna soluzione,
mentre
• se $e = 0$ si possono avere diverse situazioni:

1. $c \neq 0$ e $d \neq 0$, allora il sistema ammette infinite soluzioni: del tipo $x = \alpha$ $y = \dfrac{f - \alpha c}{d}$
2. $c = 0$ e $d \neq 0$, allora il sistema ammette infinite soluzioni: del tipo $x = \alpha$ $y = \dfrac{f}{d}$
3. $c \neq 0$ e $d = 0$, allora il sistema ammette infinite soluzioni: del tipo $y = \beta$ $x = \dfrac{f - d\beta}{c}$
4. (CASO BANALE) $c = 0$ e $d = 0$, allora, se $f = 0$ il sistema ammette infinite soluzioni: del tipo $x = \alpha$ $y = \beta$, mentre se $f \neq 0$ allora il sistema non ammette nessuna soluzione.

Consideriamo ora il caso generale in cui a, b, c e d siano tutti diversi da 0.
Invece di procedere per sostituzione per risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

suggeriamo di procedere nel seguente modo: L'idea è utilizzare in modo intelligente il fatto che se α, β, γ e δ sono numeri reali e se inoltre $\eta \neq 0$ e $\theta \neq 0$ sono numeri reali[1] allora

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \gamma = \beta + \delta \end{cases}$$

e anche

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \eta\alpha = \eta\beta \\ \theta\gamma = \theta\delta \end{cases}$$

Di conseguenza, moltiplicando per d la prima riga e per $-b$ la seconda riga, otteniamo

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} d(ax + by) = de \\ -b(cx + dy) = -bf \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} adx + bdy = de \\ -bcx - bdy = -bf \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} adx + bdy = de \\ adx + bdy - bcx - bdy = de - bf \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} adx + bdy = de \\ (ad - bc)x = de - bf \end{cases}$$

da cui NECESSARIAMENTE

$$(ad - bc)x = de - bf$$

e quindi, dobbiamo distinguere due casi $\boxed{(ad - bc) \neq 0}$ e $\boxed{(ad - bc) = 0}$

- $\boxed{\text{se } (ad - bc) \neq 0}$ allora

  y si ricava univocamente inserendo il valore trovato $x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}$
  nella prima equazione $adx + bdy = de$,
  OSSIA RISOLVENDO $ad\,\dfrac{de - bf}{ad - bc} + bdy = de$ ossia
  (COME VEDREMO C'E' UNA FORMULA ANALOGA PER y)

  ed in conclusione la soluzione è data da $\begin{cases} x = \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\ \\ y = \dfrac{af - ce}{ad - bc} \end{cases}$

[1] Le lettere greche α, β, γ, δ, η e θ si leggono nel seguente modo
α=alfa, β=beta, γ=gamma, δ=delta, η=eta e θ=teta

- $\boxed{\text{se } (ad - bc) = 0}$ allora
    - $\boxed{\text{se } de - bf \neq 0}$ chiaramente non ci sono soluzioni

  mentre
    - $\boxed{\text{se } de - bf = 0}$ ci sono infinite soluzioni:

  infatti possiamo prendere $x = \alpha$, per un qualsiasi valore $\alpha \in \mathbb{R}$

  e poi ricavare y dalla prima equazione $adx + bdy = de$

  inserendo il valore α al posto di x

  OSSIA risolvendo $ad\,\alpha + bdy = de$,

  da cui le soluzioni sono $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{de - ad\,\alpha}{b} \end{cases}$

MOSTRIAMO ORA COME RICAVARE l'espressione di y con un metodo analogo a quello per trovare l'espressione di x

IN ALTERNATIVA moltiplicando per $-c$ la prima riga e per a la seconda riga, otteniamo

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -c(ax + by) = -ce \\ a(cx + dy) = af \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -acx - bcy = -ce \\ acx + ady = af \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -acx - bcy = -ce \\ acx + ady - acx - bcy = af - ce \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} acx + bcy = ce \\ (ad - bc)y = af - ce \end{cases}$$

da cui, vediamo, che, NEL CASO IN CUI $\boxed{ad - bc \neq 0}$

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

NON RIPETIAMO INVECE QUI L'ANALISI DEL CASO IN CUI $\boxed{ad - bc = 0}$

RICAPITOLANDO

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

se $ad - bc \neq 0$ allora c'è una e una sola soluzione data da

$$\begin{cases} x = \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\ \\ y = \dfrac{af - ce}{ad - bc} \end{cases}$$

se invece $ad - bc = 0$ allora ci sono solo due possibilità: o nessuna soluzione o infinite soluzioni.
OSSERVAZIONE
se si trova una soluzione del sistema e il ***determinante*** $ad - bc$ è nullo, allora sicuramente ci sono infinite soluzioni
La quantità $ad - bc$ è detta DETERMINANTE, proprio per questo motivo

Come forse è noto si parla di determinante di una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

che, in questo caso, rappresenta il sistema e di cui invece il vettore (colonna)

$$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

viene detto vettore dei termini noti, in quanto il sistema si scrive in modo sintetico come

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Si definisce $\det(A)$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{notazione} = \underbrace{ad - bc}_{definizione}$$

Si noti che

$$\color{red}{ad} \color{black}{-} \color{blue}{bc} \color{black}{=} \begin{bmatrix} \color{red}{a} & & \color{blue}{b} \\ & \times & \\ \color{blue}{c} & & \color{red}{d} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, con questa notazione,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \qquad \det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix} = ed - bf \qquad \det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix} = af - ce$$

e quindi, se $\det(A) = ad - bc \neq 0$ allora, possiamo affermare che c'è una e una sola soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

e scriverla sinteticamente come

$$\begin{cases} x = \dfrac{de - bf}{ad - bc} = \dfrac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \\ \\ y = \dfrac{af - ce}{ad - bc} = \dfrac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \end{cases}$$

SI NOTI CHE la matrice del numeratore che compare per la componente x della soluzione, ossia la matrice $\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}$ è ottenuta da quella del sistema $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sostituendo la prima colonna $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ con la colonna del termine noto $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, mentre quella relativa alla componente y , ossia la matrice $\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$ è ottenuta da quella del sistema $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sostituendo la seconda colonna $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ con la colonna del termine noto $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, A questo punto dobbiamo introdurre un'altra interpretazione di un sistema lineare di equazioni lineari: di solito si pensa a l'intersezione di due rette, ma si può pensare in un altro modo.

Una coppia (x_P, y_P) si può pensare come un punto $P(x_P, y_P)$ nel piano cartesiano, ma individua anche un vettore $\vec{v}_P = \overline{0P}$, applicato all'origine. Ed inoltre fissati comunque 4 numeri a, b, c, d, posso pensare che il vettore $\vec{v}_P = \overline{0P}$ viene "***trasformato/spostato***" nel vettore $\vec{v'}_{P'} = \overline{0P'}$, con $P'(x_{P'}, y_{P'})$ di componenti

$$\begin{cases} x_{P'} = ax_P + by_P \\ y_{P'} = cx_P + dy_P \end{cases}$$

Più in generale possiamo pemsare che tutti i punti/vettori individuati dalle coordinate/ componenti (x, y) vengano trasformati contemporaneamente attraverso la trasformazione

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

in punti/vettori di coordinate/componenti (x', y').

Ad esempio ESEMPIO 1

$$\begin{cases} x' = 100x \\ y' = 1000y \end{cases}$$

se x ed y sono misure/distanze in metri, allora x' sono distanze in centrimenti e y' sono distanze in millimetri... di modo che ad esempio il punto $(x, y) = (2m, 3m)$ diviene il punto $(x', y') = (200cm, 3000mm)$. e senza unità di misura il punto $(2, 3)$ diventa il punto $(200, 3000)$

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} x' = x/100 \\ y' = y/1000 \end{cases}$$

se x ed y sono misure/distanze in metri, allora x' sono distanze in ettometri e y' sono distanze in chilometri... di modo che ad esempio il punto $(x, y) = (200m, 3000m)$ diviene il punto $(x', y') = (2hm, 3km)$

e senza unità di misura il punto $(200, 300)$ diventa il punto $(2, 3)$

SECONDA INTERPRETAZIONE

risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

diventa quindi risolvere il seguente problema:

dato il punto $P'(e, f)$ (vettore $\vec{v}_{P'} = \vec{OP'}$) trovare il punto $P(x, y)$ di cui è il trasformato.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

questa trasformazione manda rette in rette: se ad esempio consideriamo la retta

$$r = \{(x, y) : \ y = 2x + 1\}$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

allora l'insieme dei punti trasformati diventa

$$r' = \{(x', y') : \ x' = x + y, y' = x - y, \text{ con la condizione che } \ y = 2x + 1, \ x \in \mathbb{R}\}$$

ossia, sostituendo $y = 2x + 1$ nel sistema

$$\begin{cases} x' = x + (2x + 1) = 3x + 1 \\ y' = x - (2x + 1) = -x - 1 \end{cases}$$

che è una retta in forma parametrica, parametrizzata dal parametro $x \in \mathbb{R}$ (si consiglia come esercizio di trovare la fomra NON PARAMETRICA DELLA RETTA PRECEDENTE, nelle coordinate (x', y'))

Il prossimo esempio riguarderà le rotazioni, ma PER CAPIRE QUESTO ESEMPIO BISOGNA AVERE PRESENTE LE COORDINATE POLARI

OSSIA quelle usate per le carte geografiche nelle vicinanze del polo:

Ogni punto $P(x, y)$ del piano (a parte l'origine) è identificato da due parametri:

la distanza dallo zero

$$\rho = \rho_P := dist(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

e l'angolo θ che il vettore $\vec{OP}$ forma con l'asse delle ascisse, ovvero, posto r_a l'asse delle ascisse ed r_P la retta che passa per l'origine $O(0, 0)$ e il punto $P(x, y)$, θ è l'angolo fra le rette r_a ed r_P:

$$\theta = \theta_P := \widehat{r_a, r_P}$$

DI SOLITO SI PRENDE $\theta \in [0, 2\pi)$

[ATTENZIONE a volte invece si può prendere invece $\theta \in (-\pi, \pi]$, ma è solo una questione di convenzione]

Al contrario, dato un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ e un numero $\rho > 0$ questa coppia individua univocamente un punto del piano di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

ESEMPIO

come esempio il punto di coordinate cartesiane $(x, y) = (3, 3)$ in coordinate polari è il punto di coordinate $(\rho, \theta) = (\sqrt{3^2 + 3^2}, \pi/4) = (3\sqrt{2}, \pi/4$

Viceversa il punto di coordinate polari $(\rho, \theta) = (\sqrt{3^2+3^2}, \pi/4)$ è il punto di coordinate cartesiane $(x, y) = (3, 3)$
Il punto di coordinate cartesiane $(x, y) = (-3, -3)$ in coordinte polari è il punto di coordinate $(\rho, \theta) = (\sqrt{3^2+3^2}, frac54\pi) = 3\sqrt{2}, frac54\pi)$, se si è scelta la convenzione di prendere $\theta \in [0, 2\pi)]$ *[ATTENZIONE se si sceglie invece la convenzione di prendere $\theta \in (-\pi, \pi]$, allora le coordinate polari sono invece $(\rho, \theta) = (\sqrt{3^2+3^2}, -\pi/4) = 3\sqrt{2}, -\pi/4)$]*
OSSERVAZIONE: la coppia (ρ, θ) individua univocamente ogni punto del piano esclusa l'origine, per la quale ovviamente si prende $\rho = 0$, ma θ non è univocamente individuato...ovvero, se $\rho = 0$ allora per qualunque valore di θ si individua sempre l'origine...

ESEMPIO 3: ROTAZIONI
Prendiamo la trasformazione

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha)\, x - \sin(\alpha)\, y \\ y' = \sin(\alpha)\, x + \cos(\alpha)\, y \end{cases}$$

o con il linguaggio delle matrici

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vediamo ora che la trasformazione che compie su qualunque punto/vettor (x, y) è una rotazione di un angolo α: per mostrarlo prendiamo un punto generico (x, y) e scriviamolo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\, \cos(\theta) \\ y = \rho\, \sin(\theta) \end{cases}$$

consideriamo ora le coordinate del punto (x', y')

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y = \cos(\alpha)\rho\cos(\theta) - \sin(\alpha)\rho\sin(\theta) \\ y' = \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y = \sin(\alpha)\rho\cos(\theta) + \cos(\alpha)\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = \rho\left[\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)\right] = \rho\, \cos(\alpha+\theta) \\ y' = \rho\left[\sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta)\right] = \rho\, \sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

ovvero il punto (x', y') appartiene alla stessa circonferenza di raggio ρ e centro l'origine, del punto originario (x, y), ma è spostato di un angolo α (in senso antiorario) rispetto all'angolo individuato dal vettore $\vec{OP}$, con $P(x, y)$ e dala retta delle ascisse.